

# Übungen zur Algebraischen Komplexitätstheorie

Sommersemester 2001

Prof. P. Bürgisser

Blatt 11

Alle Aufgaben geben maximal 5 Punkte.

**Aufgabe 40.** (Twisted Cubic). Betrachte die Menge  $V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}\}$ . Zeige, dass  $V$  eine irreduzible affine Varietät ist und bestimme die Dimension, den Grad sowie Erzeugende des Verschwindungsideals. Sind  $f_1, \dots, f_r$  solche Erzeugende, so gilt nach Bézout

$$\deg V \leq \deg Z(f_1) \cdots \deg Z(f_r).$$

Gilt hier Gleichheit?

**Aufgabe 41.** Zeige mit Hilfe der Bézout Ungleichung, dass  $\deg(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = n!$  gilt. Hinweis: die  $\geq$ -Richtung wurde (oder wird) in der Vorlesung gezeigt.

**Aufgabe 42.** Beweise die folgende untere Schranke:

$$\frac{1}{3}n \log(d-1) \leq L(X_1^d + \cdots + X_n^d).$$

Hinweis: Benutze die Ableitungsungleichung in Kombination mit der Gradschranke.

**Aufgabe 43.** Sei  $f \in \mathbb{C}[T]$  ein quadratfreies Polynom vom Grad  $n$  und sei  $F$  das Produkt  $F = f(X_1) \cdots f(X_n)$ . Zeige, dass  $L(F)$  die Grössenordnung  $n \log n$  hat. Ist die Voraussetzung, dass  $f$  quadratfrei ist, notwendig?

Hinweis: Benutze wieder die Ableitungsungleichung und dann das "Rezept" aus der Vorlesung.

**Abgabe:** Donnerstag, den 19.07.2001, im Kasten Nr. 3 neben D1.348.