

3. Kapitel

Seminar über die Wahrheit, insbesondere in der Mathematik

Bericht und didaktischer Kommentar

Bericht: Kampf um die Disziplin des Miteinanderdenkens.

Die Seminarteilnehmer wählten das von Paul vorgeschlagene Thema: »Was ist Wahrheit? Gibt es Wahrheit? Ist sie erstrebenswert?«

Paul eröffnete das erste Gespräch, sprach von naturwissenschaftlicher Wahrheit, von »Wahrheit zwischen Menschen« und von religiöser Wahrheit. Die naturwissenschaftliche Wahrheit zweifle er immer an; über die beiden anderen von ihm genannten Arten von Wahrheit sagte er nichts weiter.

Als Beispiel einer naturwissenschaftlichen Wahrheit nannte Paul: Die Erde kreist um die Sonne. Weitere Beispiele wurden genannt: A. *Ein ins Wasser geworfener Stein sinkt.* Diese Aussage wurde durch Bedingungen eingeschränkt: Der Stein muß schwer sein, er darf z. B. nicht Bimsstein sein; er darf nicht sehr klein sein: ein Staubkörnchen sinkt nicht. B. *Alle Menschen müssen sterben.*

Paul und Norbert, auch andere, melden zu allen diesen Beispielen Zweifel an, die sie damit begründen, daß es in der Naturwissenschaft immer wieder vorgekommen sei, daß Wahrheiten aufgegeben oder erheblich verändert wurden. Ich brachte ein Beispiel für einen solchen Wandel: Im Altertum galt die Auffassung C1. *Die Erde ist eine Scheibe.* Heute wissen wir: C2. *Die Erde ist eine Kugel.* Wir sprachen über Beobachtungen, die zum Aufgeben von C1 und zum Annehmen von C2 geführt haben: das allmähliche Auftauchen und Verschwinden von Schiffen über dem Horizont auf hoher See; man konnte schließlich um die Erde herumfahren.

Norbert vor allem vertritt den Zweifel. Er fragt zu diesem Beispiel: »Welche Wertigkeit haben die Aussagen C1 und C2?« In seinem Protokoll über dieses Gespräch formulierte er die Frage schriftlich.

In der Erwartung, sie würde uns in den Kern der Wahrheitsproblematik führen, knüpfte ich im nächsten Gespräch an sie an und forderte Norbert auf, sie zu erläutern. Ich war enttäuscht und entrüstet, als Norbert antwortete: »Er habe sich bei dem Wort ‚Wertigkeit‘ nichts weiter gedacht, es sei ihm nur so in den Sinn gekommen.« »Was für eine Gedankenlosigkeit!« notierte ich mir nach diesem Gespräch. In einem nicht von mir geleiteten sokratischen Gespräch hatte ich Norbert vor nicht langer Zeit kennengelernt. Er hatte wortreich und wenig klar geredet und dadurch das Gespräch gestört. Sein jetziges Verhalten zu seiner eigenen Frage über die Wertigkeit

der Aussagen C1 und C2 bestärkten in mir den Eindruck eines Menschen, der leicht daherredet.

Jetzt übergang ich sowohl seine zu C1 und C2 neulich gestellte Frage als auch seine jetzige, diese Frage entwertende Bemerkung.

An der Tafel standen nebeneinander einerseits die Aussage C1, andererseits die Aussagen A, B, C2. Paula nahm das Problem, das ich hinter Norberts Frage vermutet hatte, auf mit der Bemerkung: A ist eine Wahrheit, weil es begründbar ist; der in A ausgedrückte Sachverhalt kann jederzeit, überall und von jedermann nachgeprüft werden, und die Prüfung bestätigt die Aussage A.

Paul fragt, ob dem alle zustimmen. Alle außer Norbert taten das. Norbert: »Ein Mensch, der keine Arme hat, kann den Satz nicht nachprüfen.« Da riß mir die Geduld: »Das ist nicht nur kein Philosophieren, das ist nicht einmal Denken«, fuhr ich ihn an. Er schwieg.

Grete wies darauf hin, daß Satz A nur unter bestimmten, auf der Erde geltenden Bedingungen richtig sei, Bedingungen über Schwere, Aggregatzustände (Wasser, Stein). Diese Bedingungen können sich in sehr langen Zeiträumen verändern. Wir müssen diese Bedingungen in Satz A mitdenken. So verstanden aber »ist Satz A eine Wahrheit«, sagte Grete, diese Formulierung bevorzugend vor den ebenfalls erwogenen: Satz A »ist wahr«, er »stimmt«, er »gilt«.

Ich ergänzte mit der Bemerkung, daß bei allen Formulierungen von Naturgesetzen bestimmte Bedingungen mitgedacht werden müssen: Zum Fallgesetz gehört die Bedingung, daß kein Luftwiderstand vorhanden ist. Zu dem Satz »Wasser siedet bei 100 Celsius« gehört die Bedingung: bei Atmosphärendruck. So sind alle »naturwissenschaftlichen Wahrheiten« zu verstehen.

So verstanden »ist A eine Wahrheit«. Wieder fragte Paul, ob dem alle zustimmen, und wieder taten das alle außer Norbert. Norbert fragte, ob zu den Bedingungen, die bei Satz A mitgedacht werden müssen, auch »biologische Bedingungen gehören, z. B. solche, die die Denkfähigkeit des Menschen betreffen«.

Ich brach hier das Sachgespräch ab. Da ich vorher Norbert scharf angefahren hatte, lag mir an einem Metagespräch, um mein Verhalten Norbert gegenüber zur Sprache zu bringen. Ich begründete meinen Angriff auf Norbert. Darauf dieser: »Die Bemerkung über den Menschen ohne Arme ist mir herausgerutscht; es ist fast beleidigend, wenn so eine Bemerkung ernstgenommen wird.« Er hatte seine Bemerkung keineswegs in scherzendem Ton vorgebracht, sondern so, als wollte er Paulas Bemerkung über die Nachprüfbarkeit des Satzes A erschüttern. Meine Antwort: »Soll ich in Zukunft Ihre Äußerungen nicht mehr ernstnehmen?«

Wie kann ich verhindern, daß der Gruppe die Arbeit an einem schönen und wesentlichen Thema durch gedankenloses Daherreden eines Teilnehmers verdorben wird? Das war das Thema meiner Nachbesinnung nach diesem Gespräch. Ich erinnerte mich, daß ich vor Jahren einem Studenten unrecht getan hatte. Der hatte eine Position vertreten, die mir unernst vorkam, und ich hatte ihn, wie jetzt Norbert,

scharf angefahren. Später erkannte ich, daß die von jenem Studenten vertretene Position ernstzunehmen war. In meiner Nachbesinnung fragte ich: Könnte Norberts jetziges Gesprächsverhalten ernstzunehmen sein?

Einen ernstzunehmenden Gedanken fand ich in Norberts Protokoll: »Dem, was wir heute wissen über die Wahrheiten, wird der völlig falsche Wert zugeordnet. Sie werden nämlich fast immer als starr und endgültig behandelt, was zwar Sicherheit gibt, aber kaum eine offene, freie Weiterentwicklung der Naturwissenschaft und des Menschen gestattet.« Merkwürdig: Hier nimmt Norbert seine Frage nach der Wertigkeit naturwissenschaftlicher Aussagen, bei der er sich angeblich nichts gedacht hatte, durchaus ernst.

Zu Beginn des nächsten Gesprächs fragte ich ihn nochmals zu Satz A: Schließt er sich dem Konsensus der übrigen Teilnehmer an? Norbert antwortete, er habe noch Zweifel, könne die aber jetzt nicht begründen. Er bat darum, die Frage, ob er sich dem Konsensus anschließen, erst einmal zurückzustellen.

Wir kehrten zu Paulas Ansatz zurück, in der Nachprüfbarkeit einer naturwissenschaftlichen Aussage das Kriterium ihrer Wahrheit zu suchen. Flora hatte in ihrem Protokoll vorgeschlagen, in einem Katalog von Kriterien das zu fassen, was eine naturwissenschaftliche Wahrheit zur Wahrheit macht. Ein Kriterium wurde sofort genannt, eben das von Paula: Eine naturwissenschaftliche Aussage ist wahr, wenn sie jederzeit nachprüfbar ist und die Prüfung die Aussage bestätigt. Ein weiteres Kriterium konnte niemand nennen, und Flora war verblüfft, fast enttäuscht: Statt eines Katalogs von Kriterien nur dieses eine? So einfach sollte die Sache sein?

Grete sprach von den naturwissenschaftlichen Aussagen, die wir selber nicht nachprüfen können, z. B. weil wir nicht über das erforderliche Laboratorium verfügen. Gerhard nannte die Uranspaltung als Beispiel. In solchen Fällen verlassen wir uns auf die Berichte glaubwürdiger Wissenschaftler.

Hier hakte Norbert ein: Jetzt werde von *Glaubwürdigkeit* gesprochen, wo doch nach naturwissenschaftlicher Wahrheit gefragt sei. Wieder ging mein Unwille gegen ihn mit mir durch. Ich sagte, es sei typisch für ihn, daß er bei der sekundären Frage der Glaubwürdigkeit von Wissenschaftlern einhake, die primäre Frage des Kriteriums für die Wahrheit einer naturwissenschaftlichen Aussage jedoch liegen lasse.

Die Arbeitsatmosphäre war durch dieses mein Verhalten gestört. In einem Metagespräch fragte Norbert, wieso ich seine Frage, die Glaubwürdigkeit betreffend, zurückgewiesen hätte. Es gefiel mir, daß er mein Verhalten nicht hinnimmt. Sein Protest gegen mich fand vielfältige Unterstützung in der Gruppe, obwohl niemand Norberts Zweifel verständlich machen konnte. Erst jetzt, da ich diesen Bericht schreibe, fällt mir auf, daß ich an die Interpretation, die er selber in seinem oben zitierten Protokoll gegeben hat, an dieser Stelle nicht gedacht habe.

Norberts Metagespräch-Frage beantwortete ich, indem ich den Unterschied zwischen der sekundären Frage der Glaubwürdigkeit von Wissenschaftlern und der primären Frage nach dem Wahrheitskriterium für naturwissenschaftliche Aussagen

darlegte. Auf dem Nachhauseweg im Auto fragte ich Grete, ob sie hinter Norberts Zweifel ein ernsthaftes Problem spüre. Sie vermutet, seine Bedenken richteten sich gegen »das große Wort Wahrheit«. Sie vermutet, Norberts Bedenken würden behoben sein, wenn wir statt »Satz A ist eine naturwissenschaftliche Wahrheit« sagen würden: »Satz A stimmt« oder »ist richtig« oder sogar »Satz A ist wahr«. In meiner Nachbesinnung habe ich zu der Frage, was ich als Gesprächsleiter in diesem Gespräch getan habe, notiert: »Wenig Hilfreiches, weil es mir nicht gelang, mich von dem einmal gefaßten Eindruck, daß Norbert gedankenlos daherredet, zu lösen.«

Vor dem nächsten sokratischen Gespräch bat ich Norbert zu einem Gespräch unter vier Augen. In dem Gespräch habe ich über seine innere Situation Wesentliches erfahren. Sein rein technisches, außerhalb der Lehrerausbildung liegendes Studium befriedigt ihn nicht, bietet ihm nur Pauken und Handwerk. Er ist dabei, es aufzugeben. Sein Bedürfnis nach geistiger Tätigkeit wird in diesem Studium nicht befriedigt; dieses Bedürfnis hat ihn in unser Seminar gebracht.

Er wirkt persönlich gewinnend, offen und Vertrauen einflößend. Seine Freundin Lore sagte mir, angesichts seiner ungeklärten Studiensituation sei er »in einer negativistischen Phase«, vielleicht verzweifelt.

Dieses Gespräch mit ihm und dann mit Lore hat meine Haltung ihm gegenüber völlig verändert.

In das nächste sokratische Gespräch brachte Grete ihre neulich im Auto geäußerte Vermutung ein: Norberts Bedenken richteten sich gegen »das große Wort naturwissenschaftliche Wahrheit«. Sie schlug statt dessen die Formulierungen »A ist richtig« oder »A stimmt« vor. In der Tat stimmte Norbert jetzt ohne Wenn und Aber zu. Das führte zu einem von Norbert mitgetragenen Konsensus der ganzen Gruppe über folgende Sätze:

Der Satz »Ein ins Wasser gefallener Stein sinkt« ist richtig.

Der Satz »Alle Menschen sterben« ist richtig.

Der Satz »Die Erde ist eine Kugel« ist richtig.

Eine naturwissenschaftliche Aussage ist richtig, wenn sie jederzeit überprüfbar ist und der Überprüfung standhält.

Der Satz »Die Erde ist eine Scheibe« ist keine richtige naturwissenschaftliche Aussage, weil er zwar jederzeit überprüfbar ist, aber der Prüfung nicht standhält.

Daß Norbert all dem jetzt ohne Wenn und Aber zustimmte, ist sicher nur durch Gretes Vermeidung »des großen Wortes Wahrheit« bewirkt worden. Es ist vor allem dadurch ermöglicht worden, daß mein Gespräch mit Norbert unter vier Augen sowohl meinen Eindruck von ihm und also meine Haltung zu ihm als auch sein Gesprächsverhalten verändert hatte: Ich hatte das Vorurteil »einer, der gedankenlos daherredet,« überwunden und konnte ihn jetzt ernstnehmen. Und er fühlte sich in seiner nicht leichten inneren Situation verstanden. Er hat dann schnell die für das sokratische Gespräch erforderliche Disziplin des Denkens und Sprechens gewonnen; gedankenloses Daherreden ist nicht mehr vorgekommen.

Didaktischer Kommentar: Die Gesprächsdisziplin als Aufgabe des Gesprächsleiters

Die Aufgabe des Gesprächsleiters, die zum sokratischen Gespräch notwendige Disziplin des Denkens und Sprechens zu erreichen, nicht zuzulassen, daß der Gruppe das Miteinanderdenken gestört wird, kann einen Kampf mit einem Teilnehmer notwendig machen. Diesen Kampf mit überlegener Ruhe durchzuführen, ist sehr wünschenswert. Es wird aber nicht immer gelingen.

Bericht: Übergang zur Mathematik

»Eine naturwissenschaftliche Aussage ist richtig, wenn sie jederzeit überprüfbar ist und der Überprüfung standhält.« Ich berichtete aus der Geschichte des wissenschaftlichen Denkens: Das Kriterium der Überprüfung durch Beobachtung und Experiment war bereits den alten Griechen bekannt, wie die Untersuchungen des Archimedes über Hebelwirkung, Schwerpunkt, schwimmende Körper zeigen. Diese Ansätze kritisch-wissenschaftlichen Denkens gingen verloren im Mittelalter, unter dem Einfluß der »berühmte(n) tausendjährige(n) christliche(n) Pause in der Geschichte des autonomen Denkens« – so Paul Lorenzen¹. In dieser Zeit suchte man naturwissenschaftliche Streitfragen durch Berufung auf Aristoteles und andere als Autoritäten geltende Autoren zu entscheiden: ihre in Büchern niedergelegten Lehren waren das Wahrheitskriterium. Erst die Neuzeit gewann das Kriterium der Überprüfung durch Beobachtung und Experiment wieder.

Diese Ausführungen regten Norbert an, den Satz des Pythagoras als Beispiel einer von den alten Griechen entdeckten naturwissenschaftlichen Wahrheit zu erwähnen. Ist er eine naturwissenschaftliche Aussage? Die Frage nach dem Unterschied zwischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Aussagen wurde aufgeworfen. Paul erklärte ihn so: Die Naturwissenschaften haben es immer mit Materie zu tun, die Mathematik hingegen mit gedachten, idealisierten Formen und Strukturen, die es in dieser Strenge real nicht gibt. Das wurde erläutert an Hand der scharfen Kanten der Tische, an denen wir saßen: Trotz ihrer Schärfe sind sie keine mathematischen Geraden.

Der Satz des Pythagoras wird von den Gesprächsteilnehmern für richtig gehalten. Auf Grund unseres Kriteriums der Nachprüfbarkeit? Hilde formulierte als Kriterium für die Richtigkeit mathematischer Aussagen: *Eine mathematische Aussage ist richtig, wenn sie bewiesen werden kann.* Dem stimmten alle zu, auch Norbert.

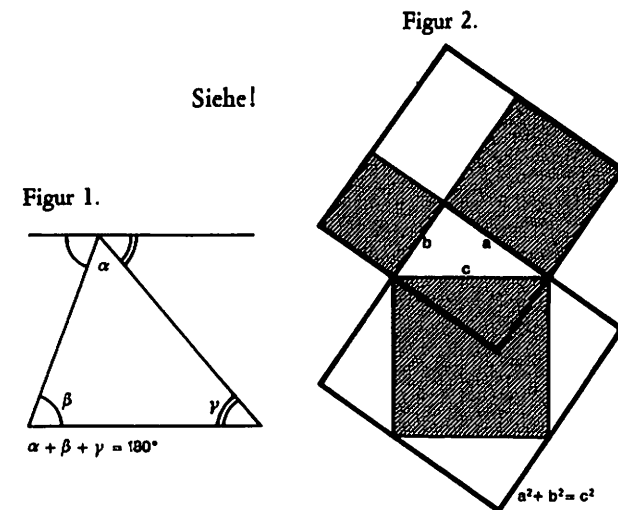
Der Beweis in der Mathematik ist *eine* Art der Überprüfung, Beobachtung und Experiment in der Naturwissenschaft sind ebenfalls eine Art der Überprüfung. Sind diese beiden Arten der Überprüfung gleich oder identisch?

¹ Paul Lorenzen: *Skizzen zur Philosophie der Sprache*. In: *Praktische Philosophie und konstruktive Wissenschaftstheorie*. Hrsg. v. F. Kambartel. Suhrkamp Frankfurt/M. 1974, S. 34.

Neben dieser Frage bleibt uns noch Pauls Frage zum Wandel des Weltbildes zu untersuchen: Die Alten haben die Erde als Scheibe angesehen; wir wissen, daß sie eine Kugel ist. Haben wir irgendeine Gewähr dafür, daß, was wir heute für eine richtige naturwissenschaftliche Aussage halten, nicht später als falsch erkannt wird? »Hängt Wahrheit naturwissenschaftlicher Aussagen von der geistigen Einstellung der Menschen ab?« formuliert Paul. Und Norbert findet, daß diese Formulierung auch seine Frage ausdrückt.

Sollten wir uns zuerst diese Frage vornehmen oder zuerst die über die naturwissenschaftliche und die mathematische Wahrheit? Ich plädierte dafür, zunächst die Frage der naturwissenschaftlichen und der mathematischen Wahrheit aufzunehmen: Je tiefer wir verstanden haben, was Wahrheit in verschiedenen Bereichen bedeutet, desto besser sind wir vorbereitet für die Untersuchung der Frage von Paul und Norbert. Die Mehrheit der Gruppe sprach sich für meinen Vorschlag aus.

Zu Beginn des folgenden Gesprächs zeichnete ich die beiden Figuren 1 und 2 an die Tafel und bemerkte, *ich* würde zu ihnen nichts weiter sagen.



Didaktischer Kommentar: Die indische Beweismethode in der Geometrie

Diese ist anders als die euklidische. Die euklidische Methode löst den Beweis in einzelne logische Schlüsse auf, wobei Voraussetzungen (Prämissen) und Schlußsatz (Konklusion) jedes einzelnen Schlusses klar hervortreten müssen. Die indische Methode sucht eine Figur zu finden, die so erhellend ist, daß die Aufforderung

»Siehe!« zu der Figur genügt, um den Betrachter zu der fraglichen geometrischen Einsicht zu führen. Ich verfuhr hier nach der indischen Methode.

Ich tat das, weil sie mir der geeignetste Weg zu sein schien, die Teilnehmer *erfahren* zu lassen, was Einsicht in eine mathematische Wahrheit ist. Diese Erfahrung sowie die weitere, wie man im Experiment eine naturwissenschaftliche Wahrheit gewinnt, sind Voraussetzung für eine fruchtbare Diskussion über den Wahrheitscharakter mathematischer und naturwissenschaftlicher Aussagen und erst recht für eine fruchtbare Erörterung der Frage von Paul und Norbert, ob Wahrheit in diesen Bereichen von der geistigen Einstellung der Menschen abhängt. Ehe man *über* Erkenntnisse und Erkenntnisprozesse, hier in Mathematik und Naturwissenschaft, philosophiert, muß man diese Erkenntnisse und Erkenntnisprozesse selber kennenlernen und nachvollziehen.

Bericht: »Wo ist der Punkt, an dem ich selber sagen kann: Dies ist wahr?«

Die Figur zum Winkelsummensatz wurde nicht beachtet; die Gruppe wandte sich sofort dem Satz des Pythagoras zu.

Ziemlich rasch »sah« man, daß die beiden stark umrandeten Quadrate gleich sind, daß beide die Seitenlänge $a + b$ haben. Auch sah man bald, daß, wenn man von dem unteren stark umrandeten Quadrat viermal die Fläche des ursprünglichen rechtwinkligen Dreiecks fortnimmt, das Hypothenusenquadrat übrigbleibt und daß, wenn man von dem oberen stark umrandeten Quadrat viermal die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks fortnimmt, die beiden Kathetenquadrate übrigbleiben. Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen. Dies alles geschah unter lebhafter Beteiligung fast aller, wobei Erstaunen zutage trat: »So einfach ist das also!« Damit war geleistet, was die Aufforderung »Siehe!« der indischen Beweismethode bezweckt.

Nun stellte Gerhard, der an einem Gymnasium Mathematik unterrichtet, die Frage: Woher wissen wir, daß die untere stark umrandete Figur ein Quadrat ist? Die Frage wurde nicht gleich von allen verstanden, und Grete hat sie vermutlich auch später nicht verstanden. Um Gerhards Frage zu verstehen und zu beantworten, war es nötig, auf die Art und Weise der Konstruktion des unteren stark umrandeten Quadrats zurückzugehen: Es ist konstruiert worden durch Verlängern der beiden Katheten und durch Ziehen der Parallelen durch die beiden unteren Ecken des Hypothenusenquadrats. Danach wissen wir zunächst nur, daß die Winkel in dem entstandenen stark umrandeten Viereck rechte sind. Daß die Seiten alle gleich $a + b$ sind, wissen wir zunächst noch nicht. Gerhard, Stephan, Lydia machten sich daran, das zu beweisen. Aber Grete unterbrach unwillig: »Mir reicht's jetzt!«

Sie hatte nur den ersten Beweisschritt aufgefaßt: das viermalige Fortnehmen des rechtwinkligen Dreiecks von den beiden stark umrandeten Quadraten. Gerhards

Frage und das Schließen der damit aufgewiesenen Beweislücke hatte sie nicht mehr aufgefaßt.

Ich erklärte, weshalb ich es im Zusammenhang mit unserer philosophischen Frage für wichtig hielt, daß alle Gesprächsteilnehmer das Entstehen einer mathematischen Einsicht in ihrem Geiste *erfahren*. Dazu müssen wir uns mathematische Beweise anschauen.

Grete erzählte, daß für sie der Mathematikunterricht ein sie durch die Schule hindurch begleitender Alptraum gewesen war und daß sie im Vorabitur die Mathematik hinter sich gelassen hat mit dem Vorsatz »Nie wieder!« Nun wurde sie hier mit Mathematik konfrontiert! Auch für Lore ist der Mathematikunterricht ein Alptraum gewesen. Im Gegensatz zu Grete hat sie das aber nicht gehindert, unsere jetzigen Überlegungen interessiert mitzuvollziehen.

Im folgenden Gespräch bemerkte Paul rückschauend: Wir sind voreilig davon ausgegangen, daß das stark umrandete große Viereck ein Quadrat und mit dem oberen deckungsgleich ist. Norbert: »Wir haben, ohne uns dessen bewußt zu sein, eine Voraussetzung gemacht.« Daran knüpfte Lore die Fragen: »Wie weit muß man zurückgehen im Begründen der Voraussetzungen, die man macht? Wieweit muß man in die Materie eindringen beim Forschen nach Wahrheit? Wo ist der Punkt, an dem *ich* sagen kann: Dies ist wahr?« Sie betonte das »ich«: In ihrem eigenen Geiste, unabhängig von Autoritäten, sucht sie eine Wahrheit, die nicht wieder auf ungeprüften Voraussetzungen beruht.

Widerstrebend erklärte Grete sich bereit, sich auf Lores Fragen einzulassen und den Beweis, daß das untere stark umrandete Viereck ein Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ ist, aufzubauen. Zwar erklärte sie, wir würden dabei doch nur finden, daß wir bei diesem Beweis wiederum Voraussetzungen machen, die eines Beweises bedürfen. Paul, Stephan und Lydia führten den Beweis, indem sie mittels des Kongruenzsatzes WSW zeigten, daß die vier Dreiecke, die, auf den Seiten des Hypothenusenquadrats auf sitzend, dieses zu dem stark umrandeten Viereck ergänzen, deckungsgleich sind. Der Kongruenzsatz WSW lautet: Dreiecke, die in einer Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind deckungsgleich.

Gretes Vermutung ist bestätigt worden: Auch dieser Beweis macht von einer Voraussetzung Gebrauch: der im Kongruenzsatz WSW ausgesprochenen, daß ein Dreieck durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel eindeutig bestimmt ist.

Lore war die erste, die mit Bestimmtheit sagte, mit dieser Voraussetzung sei der Punkt erreicht, an dem sie selber sagen könne: »Dies ist wahr.« Ich forderte die Teilnehmer auf, die Figur zu zeichnen: eine Seite und an jedem Endpunkt einen bestimmten Winkel. Das führte dazu, daß alle Teilnehmer feststellten, was Lore spontan festgestellt hatte: Hier ist der Punkt, an dem wir selber sagen können: Dies ist wahr. Es wurde Konsensus hierüber festgestellt.

Paul faßte jetzt folgendermaßen zusammen: Wir haben hiermit einen mathemati-

schen Beweis, den des Satzes des Pythagoras, in allen Teilschritten selber nachvollzogen, so weit, bis wir auf eine Voraussetzung kamen, bei der die Frage nach einer weiteren Voraussetzung nicht mehr auftritt und bei der jeder von uns aus sich selber sagen kann: Das ist wahr. Eine solche Voraussetzung haben wir im weiteren Gespräch Basisvoraussetzung genannt.

Von da an drehten sich unsere Gespräche um den Charakter der Basisvoraussetzungen. Gefragt wurde: Könnte es nicht geschehen, daß jemand uns zeigt, daß wir bei der Voraussetzung WSW, die wir für eine Basisvoraussetzung gehalten haben, doch noch eine andere Voraussetzung gemacht haben? So war es ja Grete widerfahren mit ihrer Voraussetzung, daß die beiden stark umrandeten Vierecke deckungsgleiche Quadrate sind. Woran kann man selber erkennen, daß man die Basisvoraussetzung erreicht hat? »Wo ist man an der Basis des Warum-Fragens angekommen, wo man nicht mehr weiterfragen kann?« Das ist Norberts Formulierung. Im Gespräch ergab sich noch die weitere: Was ist eigentlich der Unterschied zwischen einer Basisvoraussetzung und einer Voraussetzung anderer Art, z. B. der über die beiden stark umrandeten Vierecke?

Paul gab die Antwort: Die Basisvoraussetzung ist die unmittelbar einleuchtende, die, bei der ich keinen Zweifel mehr habe, daß sie wahr ist. Ich fragte, was hier mit »unmittelbar« gemeint sei. Darauf wurde im Gespräch die Antwort erarbeitet: ohne Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen. Pauls Definition der Basisvoraussetzung lautet dann: Die Basisvoraussetzung ist die unmittelbar, d. h. ohne Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen, einleuchtende Voraussetzung.

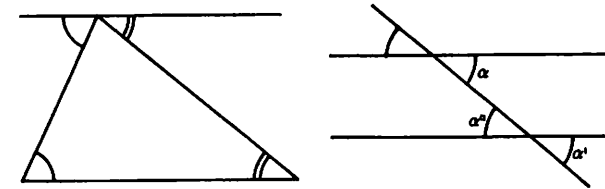
Diese Definition wurde von verschiedenen Teilnehmern verschieden verstanden. Gerhard, Grete und andere faßten sie so auf: Was ohne Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen einleuchtet, kann individuell verschieden sein; was dem einen unmittelbar einleuchtet, dafür sucht ein anderer den Grund in noch weiteren Voraussetzungen. Andere hingegen hatten Pauls Definition aufgefaßt als ein Kriterium, das uns unabhängig von den verschiedenen Ansprüchen, die verschiedene Personen in bezug auf Strenge der Begründung stellen, ermöglicht zu entscheiden, ob eine bestimmte Aussage eine Basisvoraussetzung ist oder nicht. Auch ich hatte Pauls Definition in diesem Sinne verstanden, nämlich: eine Voraussetzung, an der zu zweifeln psychologisch nicht möglich ist. Ich habe jedoch diese Formulierung nicht in unser Gespräch eingebracht.

Norbert versuchte, dieser Zweideutigkeit zu entgehen durch die Formulierung: Eine Basisvoraussetzung ist eine Voraussetzung, die unmittelbar, d. h. ohne Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen, wahr ist.

Dieser Ansatz sollte jetzt am Beispiel geprüft werden. Gerhard schlug vor, statt des Satzes des Pythagoras ein neues Beispiel zu nehmen, den Winkelsummensatz. Paul entwickelte den Beweis, Grete wiederholte ihn. Als Basisvoraussetzungen wurden dabei benutzt die Sätze von der Gleichheit von Stufenwinkeln (α , α') an Parallelen und von der Gleichheit von Scheitelwinkeln (α' , α'). Der Satz von der Gleichheit von

Wechselwinkeln (α , α'') an Parallelen wurde aus diesen Basisvoraussetzungen bewiesen.

Figur 3.



Auch nach diesem Exkurs über den Winkelsummensatz blieb jedoch die Unsicherheit, wie wir den Begriff »Basisvoraussetzung« definieren sollen, bestehen. Die Aktivität der Gruppe ist erlahmt. Wir hatten ein Metagespräch. Lore hat aktiv mitarbeiten können bis zu ihrer Formulierung über den Kongruenzsatz WSW: »Hier kann ich sagen ‚Das ist wahr‘«, der Formulierung, die uns zum Begriff der Basisvoraussetzung geführt hat, der uns jetzt Schwierigkeiten bereitet. Bei den dann folgenden Erörterungen darüber, was wir unter Basisvoraussetzung verstehen wollen, »war sie mit ihren eigenen aktiven Gedanken nicht mehr dabei«. Hilde sagt, ihr Interesse ginge mehr auf die lebendig-menschlichen Dinge; die abstrakte Frage nach der Struktur der mathematischen Wahrheit interessiere sie weniger. Offensichtlich war das Interesse an dieser Frage in der Gruppe im ganzen nicht stark genug, um die Arbeit durch die jetzigen Schwierigkeiten hindurchzutragen. Jedoch waren nicht alle Teilnehmer unbefriedigt. Flora sah den Gang unserer Untersuchungen klar vor sich; sie schlug vor, die Definition der Basisvoraussetzung noch zu einem uns befriedigenden Abschluß zu bringen, um dann an den Vergleich mathematischer und naturwissenschaftlicher Wahrheit heranzugehen. Besonders konstruktiv war Paul. Er appellierte an die Bereitschaft, sich »ernsthaft um das Durchdenken des Pythagoras-Beweises zu bemühen. Ich bin sicher, daß man in mathematischen Problemen auf die Basisvoraussetzungen kommt, wenn man sich ernst und vernunftgemäß darum bemüht.« So Paul. Und Grete bekräftigte: »wenn man sich zielstrebig und intensiv darum bemüht.« Sie hat durch unsere Arbeit am Satz des Pythagoras »ein Erlebnis gehabt«, das einer mathematischen Einsicht. Die indische Beweismethode hat ihr diese Einsicht vermittelt. Das hat sie so beeindruckt, daß sie Bekannten den Beweis gezeigt hat – sie, für die Mathematik in der Schule ein Alptraum gewesen ist.

Didaktischer Kommentar: Verfehlte Lenkung.

Während ich diesen Bericht schreibe, lange nach dem Seminar, wird mir klar, wie ich das festgefahrene Gespräch vielleicht in fruchtbare Bahnen hätte lenken können. Damals habe ich das nicht gesehen.

Ich hätte auffordern können: *Jeder Teilnehmer stelle sich die Frage, was er in bezug auf Gewißheit, auf Überwinden von Zweifel, beim Nachvollziehen eines mathematischen Beweises in sich erfährt.* Erfahrungen hatten wir in unserem Gespräch gemacht, sowohl die Erfahrung des Nicht-mehr-zweifeln als auch die des vorschnellen Akzeptierens einer Voraussetzung, die dann als noch nicht hinreichend begründet erkannt und durch Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen bewiesen wurde. Diese Erfahrungen hätten wahrscheinlich ausgereicht zu einem Konsensus etwa folgenden Inhalts:

Beim Durchdenken des Beweises erlangt jeder schließlich Gewißheit. Denn er kommt auf Voraussetzungen, an denen er nicht mehr zweifelt. Zwar kann eine Gewißheit vorschnell sein; dann kann Zweifel an ihr auftreten. In einem solchen Falle gelangen wir aber durch Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen zu neuer Gewißheit. Auch sie gründet sich wiederum auf Voraussetzungen, bei denen wir keinen Zweifel mehr haben. Wir dürfen aber nicht ausschließen, daß Gesichtspunkte, die uns in Zukunft in den Blick kommen, neuen Zweifel hervorrufen. Ihn werden wir aber in derselben Weise überwinden können.

Zu einem Konsensus dieses Inhalts würden die Erfahrungen, die wir gemacht haben, wahrscheinlich ausgereicht haben. Pauls konstruktiver Beitrag im Metagespräch war ein Ansatz, der auf einen solchen Konsensus hin hätte weiterentwickelt werden können. Mit diesem Konsensus wäre die starre Vorstellung, wonach ein Satz entweder eine Basisvoraussetzung ausdrückt oder nicht, ersetzt worden durch die Vorstellung: bis auf weiteres keinem Zweifel unterliegen und also bis auf weiteres als Basisvoraussetzung akzeptiert.

Diese Lösungsmöglichkeit für unsere Schwierigkeiten habe ich während des Seminars nicht gesehen. Ich war auf die starre Vorstellung fixiert: Eine Basisvoraussetzung ist etwas, woran Zweifel psychologisch nicht möglich ist. So konnte ich die helfende Lenkung, die in jener an alle Teilnehmer gerichteten Aufforderung hätte bestehen können, nicht geben. Wir sehen hier wiederum, in welchem Maße die Fähigkeit des Gesprächsleiters, das Gespräch in fruchtbare Bahnen zu lenken, von dem Maß seiner philosophischen Einsicht abhängt.

Um die mir damals verfehlte Lenkung durchzuführen, war auch folgende Einsicht erforderlich: Die Selbstbesinnung, zu der ich der Gruppe verhelfen mußte, war nicht eine Besinnung auf geometrische Sachverhalte, sondern eine *Besinnung auf unsere innere Erfahrung* in bezug auf Gewißheit, Zweifel und Überwinden von Zweifel. Ohne diesen Unterschied im Blick zu haben, hätte ich die an dieser Stelle helfende Lenkung nicht geben können.

Bericht: Schwierigkeit des Problems der geometrischen Evidenz.

Über den Gang unserer Gespräche reflektierend notierte ich mir: »Es ist erstaunlich, welche Schwierigkeiten in dem Problem der Evidenz in der Geometrie stecken.« Wenn im Laufe so schwieriger Untersuchungen ein fruchtbarer Weg verfehlt wird, dann wird das Gespräch auf unfruchtbaren Wegen laufen, bis das Wahrheitsgefühl der Teilnehmer oder ein guter Einfall auf einen fruchtbaren Weg führen. Solche Durststrecken sind für alle Beteiligten und besonders für den Gesprächsleiter anstrengend. Sie können durchgestanden werden, wenn ein starkes Interesse an der Lösung des Problems die Gruppe zu beharrlichen Anstrengungen motiviert.

So stark war aber das Interesse am Problem der mathematischen Wahrheit in unserer Gruppe nicht, wie in einem Metagespräch klar hervortrat. Hinzu kam, daß die Schule bei kaum einem Teilnehmer, durchweg Abiturienten, Sinn für mathematisches Denken geweckt hatte; das Gefühl, daß man in der Mathematik Dinge tun muß, ohne einzusehen, weshalb man sie tut, war vorherrschend. Wir mußten entscheiden, was wir in dieser Lage tun sollten. Ich hatte mir vorgenommen, die Gruppe nicht im mindesten zurückzuhalten, falls sie beschlösse, die Untersuchung über mathematische Wahrheit abzubrechen. Norbert fragte, ob wir beim Problem der *naturwissenschaftlichen* Wahrheit weniger Schwierigkeiten haben würden. Ich antwortete: Auch da würden wir uns an einem Beispiel genau anschauen müssen, wie Erkenntnis gewonnen, und das heißt hier: durch das Experiment gewonnen wird. Wir müßten etwa das schöne Experiment zum Fallgesetz durchführen: Eine berußte Glasplatte fällt an einer horizontal befestigten schwingenden Stimmgabel entlang, wobei eine an einer Stimmgabelzinke angeklebte Papierspitze das Fallgesetz in den Ruß der fallenden Platte hineinschreibt. Auch da müßten wir in die Details der Auswertung des Experiments einsteigen, müßten die in den Ruß gezeichneten Kurven ausmessen, um das Gesetz der gleichmäßigen Geschwindigkeitszunahme zu finden. Auch hier Kleinarbeit, bei der das Interesse erlahmen kann.

Flora und Grete schlugen vor, die Arbeit an der Definition der Basisvoraussetzung zu Ende zu führen (1. Vorschlag). Paula, überzeugt von der materialistischen Theorie, führte aus, wir müßten uns zu allererst über »die objektive Existenz der Materie« verständigen; ohne das sei alles andere aussichtslos (2. Vorschlag). Hilde wollte das Thema »wissenschaftliche Wahrheit« ganz verlassen und, anknüpfend beim zweiten der von Paul im ersten Gespräch genannten Stichworte »Wahrheit zwischen Menschen«, neu ansetzen (3. Vorschlag). Ich schlug vor, anzuknüpfen an Pauls Formulierung »Die Basisvoraussetzung ist die unmittelbar einleuchtende, an der ich keinen Zweifel mehr habe,« und die innere Erfahrung des Zweifels zu untersuchen (4. Vorschlag).

Und nun geschah das für mich Erstaunliche: Nach meiner Aufforderung, für oder gegen einen dieser Vorschläge zu plädieren, wurde nur für den ersten plädiert, besonders entschieden von Lore, die doch den letzten Erörterungen über Basis-

voraussetzungen nicht mehr hatte folgen können; »ohne jeden Zweifel«, sagte sie, sei sie dafür, die Arbeit an der Definition der Basisvoraussetzung fortzuführen. Dem schlossen sich in einer Abstimmung alle Teilnehmer mit der einen Ausnahme von Paula an; auch Hilde stimmte dafür. Bei Paula war ihr Überzeugtsein von der materialistischen Theorie aus mehr als *einer* Äußerung erkennbar gewesen.

Didaktischer Kommentar: »Planmäßiges, unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung.«

Ich habe während des Seminars nicht versucht, die Motivation der übrigen Teilnehmer für diese Haltung zu erforschen. Flora, Gerhard, Grete, Hilde, Lore, Paul waren aus einem früheren Seminar mit den Anforderungen sokratischer Arbeit vertraut. Ich vermute, daß diese Erfahrung ihre Haltung mitbestimmt hat; daß sie damals etwas von dem Vertrauen erworben haben, von dem Nelson spricht:

»Sokrates ist der erste, der, getragen von dem Vertrauen in die Kraft des menschlichen Geistes, die philosophische Wahrheit zu erkennen, mit diesem Vertrauen die Überzeugung verbindet, daß nicht Einfälle oder äußere Lehre uns diese Wahrheit erschließen, sondern daß nur planmäßiges, unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung uns aus dem Dunkel zu ihrem Licht führt.«²

War es richtig, daß ich bereit war, die Untersuchung über mathematische Wahrheit abzubrechen, wenn die Gruppe das beschlossen hätte? Ich glaube, ja. Ohne zu dieser Untersuchung motiviert zu sein, konnte die Gruppe die Schwierigkeiten nicht durchstehen, und ich konnte ihr die Motivation nicht von außen einpflanzen. Jetzt hatte sich gezeigt, daß die Motivation vorhanden war.

Was kann der Gesprächsleiter tun, wenn auch er nicht mehr sieht, in welcher Richtung eine Lösung des anstehenden Problems gefunden werden könnte? In dieser Situation war ich, als wir uns um die Definition der Basisvoraussetzung bemühten. In diese Situation kann ein Gesprächsleiter immer einmal kommen, um so eher, je geringer seine Erfahrung im sokratischen Gespräch und je geringer Weite und Tiefe seiner philosophischen Einsicht sind. Wozu hilft ihm dann das sokratische »Vertrauen in die Kraft des menschlichen Geistes, die philosophische Wahrheit zu erkennen«? Dieses Vertrauen kann nicht bedeuten, daß er und seine Gesprächsgruppe allen, auch den schwersten, philosophischen Problemen gewachsen sein müßten.

Mir liegt, wenn ich als Gesprächsleiter die Möglichkeit einer Lösung des anstehenden Problems nicht oder noch nicht sehe, nahe, das Problem von einer anderen Seite her, z. B. das Hauptproblem von einer anderen Teilfrage her, anzufassen. Das war der Sinn meines Vorschlags (4. Vorschlag oben). Wenn ich auch eine solche Möglich-

keit nicht sehe, dann bleibt mir die Hoffnung, daß bei beharrlicher Weiterarbeit ein weiterführender Gedanke auftaucht.

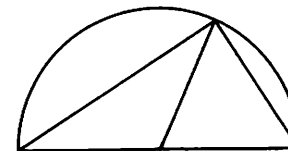
Ich habe es jedoch einmal erlebt, daß sowohl den Teilnehmern als auch mir als Gesprächsleiter alle Hoffnung schwand und daß die Arbeit mit einer Depression aller Beteiligten endete. Die Ursache lag in meiner mangelnden Vertrautheit mit der damals erörterten philosophischen Problematik.

Bericht: »Die Schinderei hat sich gelohnt.«

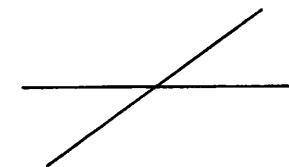
Unsere Gruppe hatte die Hoffnung nicht aufgegeben. Sie hatte sich zur Weiterarbeit an dem Thema »mathematische Wahrheit« entschlossen. Aber die Arbeit blieb eine harte Arbeit.

Paul hatte die Bemerkung gemacht, jeder müsse, um die Basisvoraussetzung zu erkennen, selber einen mathematischen Beweis finden, nicht bloß den von einem anderen vorgetragenen Beweis nachvollziehen. Das veranlaßte mich, ein neues Beispiel vorzuschlagen, Figur 4 anzuzeichnen und die Teilnehmer aufzufordern, zu Hause den Beweis für den Satz des Thales über den Umfangswinkel im Halbkreis zu suchen.

Figur 4.



Figur 5.



Unter den Beweisen, die in der nächsten Sitzung vorgebracht wurden, war nicht nur der einfachste, der sich mit Figur 4 begnügt und sich auf die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck stützt, sondern auch der umständlichere, der den Halbkreis zum vollen Kreis ergänzt, den Radius zum Durchmesser auszieht und das Dreieck zu einem Viereck ergänzt. Es muß dann bewiesen werden, daß dieses Viereck ein Rechteck ist.

Die Diagonalen dieses Vierecks sind zwei Kreisdurchmesser, also zwei gleiche, mit den Mittelpunkten aufeinander liegende Strecken. Grete akzeptierte es als Basisvoraussetzung, daß zwei solche Strecken ein Rechteck aufspannen (Figur 5). Ihr leuchtet dies unmittelbar, d. h. ohne Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen, ein.

2 »Die sokratische Methode«, I 289 und Sv 211.

Gerhard brachte für die Basisvoraussetzungen die Formulierung: »Das kann gar nicht anders sein.« So verhält es sich für Grete bei diesem Sachverhalt (Figur 5). Paul hingegen gibt sich damit nicht zufrieden. Zweifelt er an diesem Sachverhalt? Er sagt: ein leiser Zweifel bliebe ihm, weil er den Grund für diesen Sachverhalt nicht angeben könne.

Jetzt sagt Grete plötzlich, sie fände Pauls tiefer dringendes Fragen besser als ihre Haltung, die sich leichter mit einem ihr einleuchtenden Sachverhalt zufrieden gibt. Das sagt Grete jetzt, die doch unwillig protestiert hatte – »Jetzt reicht,s mir!« –, als Gerhard beim Pythagoras-Beweis die Frage aufwarf, woher wir denn wüßten, daß die stark umrandeten Vierecke (Figur 2) Quadrate und deckungsgleich sind. Die Gruppe griff ihren Gedanken auf und erarbeitete die Formulierung: *Es ist immer besser, den Versuch zu unternehmen, auch im Augenblick einleuchtende Sachverhalte noch zu beweisen.*

Flora zuerst, dann mit anderen Worten Grete, äußerten den Gedanken, daß wir zwar individuelle Unterschiede feststellen in dem, was dem einen und was dem anderen unmittelbar einleuchtet, daß es aber trotzdem möglich sein sollte, hierzu etwas allgemein Geltendes zu sagen, das kein individuelles Moment mehr enthält. Die Gruppe suchte eine solche Formulierung zu finden; an ihrer Erarbeitung hatte Lydia besonderen Anteil. Erarbeitet wurde der Satz: *Unbeschadet der Tatsache, daß der eine sich mit einer ihm einleuchtenden Voraussetzung – »Das kann gar nicht anders sein« – zufrieden gibt, wo ein anderer versuchen möchte, diese Voraussetzung noch zu beweisen, wo ein anderer »noch nach Gründen fragt« (Formulierung von Gerhard), gilt ganz allgemein folgendes:*

Es gibt Voraussetzungen, die nicht nur keine weiteren Voraussetzungen mehr erfordern, sondern bei denen ein weiteres Zurückgehen auf Voraussetzungen nicht mehr möglich ist.

Nach dem Gespräch, in dem die Gruppe diese Sätze erarbeitete, notierte ich: »Ein lebendiges, gutes Gespräch, an dem mehr Teilnehmer aktiv beteiligt waren als bisher. Die Schinderei hat sich gelohnt.«

Ich halte eine persönliche Bemerkung Pauls fest, die etwas von den Kräften zeigt, die das Durchstehen einer solchen Schinderei möglich machen. Als wir zuerst auf das Problem Basisvoraussetzung stießen, hatte er gesagt: »Ich bin sicher, daß man sie findet, wenn man sich ernst und vernunftsgemäß darum bemüht.« Nachdem er uns später seinen Beweis des Thales-Satzes vorgetragen hatte, nahm er auf jene frühere Bemerkung Bezug, als er in seinem Protokoll schrieb: »Leider, leider trage ich den Beweis sehr unernst, unklar und schwammig vor, so daß die Gruppe das Gefühl haben muß, ich fordere Ernst, besitze aber selber keinen. Seit längerer Zeit bemerke ich an mir, daß ich oft kein ernster Gesprächspartner bin. Erkenne ich Wichtiges oder den Ernst der Lage, brauche ich dann aber immer noch eine gewisse Zeit, um ruhig und ernst zu werden. Das macht mir am meisten Sorge, und hier setze ich an, um an mir zu arbeiten.« Diese Sätze las ich, als ich unglücklich war über ein Gespräch, in

dem es mir nicht gelungen war, die Schwerfälligkeit der Gruppe beim Beweisen des Thales-Satzes mit heiterer Geduld zu nehmen. Beim Lesen dieser Sätze faßte ich wieder Mut.

Unsere Arbeit am Problem Basisvoraussetzung schlossen wir mit dem Satz: *Es gibt Voraussetzungen, die so klar sind, daß sie kein Zurückgehen auf weitere Voraussetzungen mehr erfordern; daß an ihrer Wahrheit kein Zweifel mehr besteht.*

Lydia wollte hier noch zwei Fälle unterscheiden: Unter diesen klaren Voraussetzungen, an deren Wahrheit kein Zweifel mehr besteht, gibt es einerseits solche, die doch noch auf einfachere Voraussetzungen zurückgeführt werden können, andererseits solche, bei denen dies nicht mehr möglich ist.

Jedoch konnten wir dieses Problem nicht mehr erörtern. Unser Seminar war zu Ende. Den Charakter der Basisvoraussetzungen hatten wir ein Stück weit aufhellen können.