Spielerische Knobeleien mit Zahlen ab der 2. Jahrgangsstufe

Eine Lernumgebung rund um die Spielidee von »Twenty-Four«

Hartmut Spiegel/Daniela Götze **»Twenty-Four« ist ein vom Amerikaner Robert Sun entwickeltes und bei Suntex erschienenes Kopfrechenspiel. Uns hat dieses Spiel bereits vor Jahren gefesselt, und auch die Erfahrungen aus dem Unterricht haben uns immer wieder gezeigt, dass diese simple Spielidee nicht nur reichhaltige Lernchancen für Kinder unterschiedlichen Leistungsniveaus bietet, sondern Kinder und Erwachsene zum »spielerischen Knobeln« nachhaltig motivieren kann.
Im Folgenden wird gezeigt, wie dieses Spiel sinnvoll im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann.**

Worum geht es?

Nehmen Sie vier Ziffern, z. B. 1, 2, 3, 8. Bilden Sie daraus Aufgaben oder Ketten von Aufgaben, bei denen jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt. Als Rechenoperationen sind die vier Grundrechenarten zugelassen, egal in welcher Anzahl und Reihenfolge. Ein Beispiel ist das folgende: $2 \cdot 8 = 16$, $16 + 3 = 19$; $19 - 1 = 18$. Das ist eine Folge von Aufgaben, bei denen die Ziffern 1, 2, 3, 8 genau einmal benutzt werden – zusätzlich natürlich die entstandenen Zwischenergebnisse. Man kann dieselbe Rechnung (ohne das Ergebnis) auch durch einen Rechenausdruck beschreiben: $2 \cdot 8 + 3 - 1$. Die Beschreibung in einem »Term« hat den Vorteil, dass dabei wirklich nur die gegebenen Ziffern auftauchen und diese jeweils genau einmal.

Die Materialien zu diesem Beitrag

- M 1 Setze ein
- M 2 Spielen mit Rechenoperationen
- M 3 397 Kombinationen
- M 4 4 x 4-Tabellen

Probieren Sie selbst

Nun sind Sie dran: Gesucht sind Rechenausdrücke mit den Ziffern 1, 2, 3, 8 (jede Ziffer genau einmal) und den Grundrechenarten (egal in welcher Anzahl und Reihenfolge), deren Ergebnis 24 ist. Wir kennen drei, die sich deutlich voneinander unterscheiden. Für die Ziffern 1, 6, 8, 9 kennen wir zwei verschiedene Rechenausdrücke mit dem Ergebnis 24, genauso wie für 1, 3, 9, 9, wobei hier beide Möglichkeiten nicht so einfach zu finden sind.

Die Spielregeln

Mit Obigem ist die mathematische Grundidee, die unserer Lernumgebung und damit dem Spiel 24 zugrunde liegt, schon abgesteckt. Die Spielregeln selbst sind simpel: Es werden immer vier Ziffern auf einer Spielkarte abgedruckt, die sich gemäß der obigen Bedingung zur Zielzahl 24 verknüpfen lassen. Ein Kartenstapel mit z. B. insgesamt 48 Spielkarten wird mit der Rückseite der Karten nach oben auf den Tisch gelegt. Eine Karte wird aufgedeckt. Wer als erstes eine passende Aufgabe mit dem Ergebnis 24 sagt, bekommt die Karte. Dann geht es mit der nächsten Karte weiter. Wer am Ende die meisten Karten hat, ist der Gewinner.

Und noch ein paar Übungen zur Reflexion des Spiels

Damit Sie sich zunächst ein Bild davon machen können, welche Fähigkeiten beim Spielen von »24« gefördert und gefordert werden, sollten Sie es mit so vielen weiteren Zahlenkombinationen versuchen, wie sie mögen. Wir stellen Ihnen mal einige Kombinationen als Übungsmaterial zur Verfügung.
1245, 2348, 4458, 1258, 2446, 4577, 1348, 3477, 6666, 1367, 3479, 6668, 1789, 3666
Jede der hier aufgeführten Kombinationen lassen sich auf mehr als eine wesentlich verschiedene Art zur Zielzahl 24 zusammensetzen. Was meinen wir mit »wesentlich verschieden«? Das ist eine Sache der Festlegung. Es ist nicht günstig, den Begriff zu weit zu fassen, denn dann gäbe es z. B. schon 120 verschiedene Lösungen zu 4, 5, 6, 9, die sich nur dadurch unterscheiden, wie ich die beteiligten Zahlen beim Addieren zusammen-

fasse und in welcher Reihenfolge ich das erledige. Schwerer ist es vielleicht schon damit, (4 + 4) : 2 · 6 nicht als verschieden von (4 + 4) · 6 : 2 zu betrachten, aber auch in diesem Fall sehen wir es als ökonomisch an, nicht von verschiedenen Lösungen zu sprechen. Da es aber eine Frage der Übereinkunft ist, was man als verschieden betrachtet und was nicht, kann es jeder machen, wie er möchte. Für den Unterricht hat es sich als sinnvoll erwiesen, den engen Verschiedenheitsbegriff zu benutzen, d. h. dass eine lediglich unterschiedliche Reihenfolge beim Rechnen nicht als »verschieden« gezählt wird.

Nützliches Vorwissen für diese Lernumgebung im Unterricht

Alle, die viele Versuche mit der Spielidee von »24« hinter sich haben, werden Ähnliches entdecken: Es macht wenig Sinn, alle überhaupt möglichen Rechnungen so lange durchzuprobieren, bis man durch Zufall auf eine stößt, die als Ergebnis 24 hat. Ebenso wird man feststellen, dass das Ganze nur Spaß macht, wenn man das kleine 1 x 1 automatisiert zur Verfügung hat, unterschiedliche multiplikative und additive Zerlegungen der 24 kennt und schnell in einen Zusammenhang mit den vorliegenden Ziffern bringen kann. Man braucht beides: Wissensbausteine und eine Strategie.
Nehmen wir das Beispiel 2, 3, 7, 8. Hier bietet es sich an, zu überlegen, ob ich zu 2, 3, 7 eine Aufgabe mit Ergebnis 3 finde, zu 2, 7, 8 eine mit Ergebnis 8 oder zu 3, 7, 8 eine Aufgabe mit Ergebnis 12. Im ersten und letzten Fall kann man Erfolg haben: (7 + 2) : 3 = 3 bzw. 7 + 8 – 3 = 12; Als Lösungen ergeben sich: (7 + 2) : 3 · 8 = 24 bzw. (7 + 8 – 3) · 2 = 24 Im zweiten Fall klappt es nicht. Aber es gibt noch eine dritte Lösung zu 2, 3, 7, 8 : (7 – 3) · (8 – 2) = 24. Hier sind die beiden Faktoren 4 und 6 durch jeweils 2 der vorhandenen Ziffern dargestellt.
Dieses Beispiel liefert schon drei unterschiedliche Arten von Rechnungen. Je mehr Arten man im Blick hat, desto schneller bzw. leichter wird man Lösungen finden können. Eine grobe, aber hilfreiche Unterscheidung besteht darin, dass 24 eine Summe, Differenz, Produkt oder Quotient zweier Zahlen sein kann. Diese können dann selbst wiederum unterschiedlich zerlegt werden. Jeweils ein Beispiel ist in der nebenstehenden Tabelle abgedruckt.

Zum Schwierigkeitsgrad

Noch eine Bemerkung zum Schwierigkeitsgrad einer Kombination: Er hängt nicht nur von der Anzahl möglicher Lösungen und deren Komplexität, sondern auch von den persönlich bevorzugten Strategien ab. Jemand, der es z. B. vorzugsweise über eine Kombination von multiplikativen und additiven Zerlegungen probiert, wird es mit 2, 4, 9, 9 oder 5, 5, 7, 7 vielleicht schwerer als andere haben. Dennoch haben unsere Erfahrungen gezeigt, dass Kombinationen, bei denen sowohl Division als auch Subtraktion vorkommen oder bei denen Zwischenergebnisse benutzt werden, die größer als 24 sind, von der Mehrheit (der Kinder) als *schwer* angesehen werden. Daher ist es ein Muss für den Unterricht, an dieser Stelle mit Kindern darüber zu reflektieren, bei welchen Kombinationen sie lange nach einer Lösung gesucht haben und woran das vielleicht gelegen haben mag.

Summen	1 · 3 · 9 – 3	1 · 6 · 8 : 2
1 + 5 + 9 + 9	6 · 9 : 2 – 3	(9 : 3 + 9) · 2
9 + 9 + 7 – 1	3 · 9 – 1 · 3	(8 : 2 – 1) · 8
(1 + 1) · 9 + 6	3 · 9 – 6 : 2	(1 + 2) · (1 + 7)
(4 – 1) · 5 + 9		(1 + 2) · (9 – 1)
3 · 7 + 1 + 2	**Produkte**	(4 – 1) · (7 – 1)
1 · 2 · 9 + 6	(1 + 2 + 3) · 4	(9 – (2 · 3)) · 8
8 · 5 : 2 + 4	(3 + 5 – 2) · 4	(8 – (6 : 3)) · 4
2 · 9 + 1 · 6	(1 + 1) · 2 · 6	
3 · 7 + 6 : 2	(1 + 5) · 8 : 2	**Quotienten**
	(5 – 1 – 1) · 8	(6 · 7 + 6) : 2
Differenzen	(3 - 1) · 3 · 4	(7 · 7 – 1) : 2
(1 + 4) · 5 – 1	(7 – 1) · 8 : 2	(6 · 8) : (1 + 2)
(4 – 1) · 9 – 3	(1 · 1 + 3) · 6	(6 · 8) : (5 – 3)
4 · 6 + 1 – 1	(2 · 2 – 1) · 8	
3 · 9 – 1 – 2	2 · 2 · 2 · 3	

Wie man vorgehen kann

Die oben zusammengestellte Vielfalt der möglichen Rechenwege zeigt, dass das Aufgabenformat ein sehr breites Spektrum für unterschiedlich anspruchsvolle Probleme bietet. Bevor man Kinder das Spiel miteinander so spielen lässt, dass das schnellere Kind gewinnt, kann man ihnen interessante Angebote machen, die ihnen den spielerischen Umgang mit den Zahlen nahe bringen und so ihre Flexibilität im Umgang mit Zahlen entwickeln helfen. Grundsätzlich ist es bei dieser Lernumgebung immer wieder wichtig, die Kommunikation der Kinder untereinander über unterschiedliche Lösungen, Strategien oder auch Problemen anzuregen. Ein Austausch unter den Kindern führt gemäß unseren Erfahrungen zu mathematisch reichhaltigen Gesprächen, aus denen jedes Kind etwas lernen kann (vgl. Spiegel & Götze 2007). In welcher Reihenfolge die nun folgenden Lernangebote im Unterricht angeboten werden sollten, kann nach eigenem Interesse entschieden werden.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe der Startzahlen)
Es werden vier Zahlen vorgegeben und die Kinder bekommen die Aufgabe, verschiedene Folgen von Rechenaufgaben zu finden, bei denen jede Zahl nur einmal benutzt wird – es sei denn, sie tritt auch als Zwischenergebnis auf. Es können dabei noch zusätzliche Zielvorgaben gemacht werden: Wer findet die Aufgabenfolge mit dem kleinsten Ergebnis? ... mit dem größten Ergebnis? Wer findet zwei verschiedene mit dem gleichen Ergebnis? Es können für leistungsstärkere Kinder auch Bedingungen vorgegeben werden: mindestens einmal malnehmen, mindestens einmal teilen, alle drei Rechenoperationen verschieden etc.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe des Ergebnisses)
Hier geht es darum, zu der Zielzahl »24« verschiedene Sets von vier Zahlen zu finden, aus denen man diese Zielzahl errechnen kann. Auch hier können zusätzliche Randbedingungen eingeführt werden entweder hinsichtlich der Zahlen: zwei Zahlen sollen gleich sein, alle Zahlen sollen verschieden sein, es darf keine Eins dabei sein, es soll eine Eins dabei sein etc., hinsichtlich der Operationen (wie oben): mindestens einmal malnehmen, mindestens einmal teilen, alle drei Rechenoperationen verschieden etc. und/oder hinsichtlich der Anzahl der Lösungen: findest du vier Zahlen, die auf mehr als eine Art miteinander verknüpft werden können, so dass sie die gesuchte Zielzahl ergeben?

Eine neue Notationsform kennen lernen
Ausgehend von dem Problem, den eigenen Rechenweg bzw. die gefundene Aufgabe korrekt aufzuschreiben, ergibt sich ganz natürlich ein Anlass, sich über passende Notationsformen zu verständigen. Kinder schreiben nämlich gerne auch mal so: $2 \cdot 7 = 14 - 6 = 8 \cdot 3 = 24$. Dann kann einerseits die Bedeutung des Gleichheitszeichens thematisiert werden und es können die Konventionen eingeführt werden, die eine unzweideutige Notation erlauben: die Verwendung von Klammern und die Regel, dass bei nicht vorhandenen Klammern »Punktrechnung« den Vorrang vor »Strichrechnung« hat. Die Kinder können also lernen, Ausdrücke wie diese zu verstehen und auszuwerten:
$(2 \cdot 7 - 6) \cdot 3$, $(6 \cdot 8) : (3 - 1)$, $(1 + 2) \cdot (9 - 1)$, $(7 \cdot 7 - 1) : 2$ etc.

Spielen mit Zahlen und Rechenoperationen (Vorgabe der Rechenstruktur und des Ergebnisses)
Eine reizvolle Variante des vorhergehenden Aufgabenformates ist die zusätzliche Vorgabe einer »Rechenstruktur« (M 1). Es wird genau vorgegeben, welche Operationen wie zusammengesetzt werden sollen.

Spielen mit Rechenoperationen (Vorgabe der Zahlen und des Ergebnisses 24)
Damit sind wir bei der Grundidee des Spieles angelangt, die sich aber noch in unterschiedlicher Weise realisieren lässt: Soll im Sinne der anfangs beschriebenen Idee mit Karten gespielt werden, dann kann die Lehrperson in Unterstützung durch die Kinder in die vorbereitete Kopiervorlage M 2 solche Zahlenkombinationen selbst eintragen, von denen ihnen bekannt ist, dass es eine Lösung gibt. Diese können die Kinder arbeitsteilig vorher selbst ermitteln oder die Lehrperson kann selbst welche der im Anhang zu findenden 397 Kombinationen (M 3) lösen und dann solche mit passendem Schwierigkeitsgrad auswählen.
Es kann aber auch die Klasse in zwei Mannschaften geteilt werden, die gegeneinander spielen: Aus einer Schachtel, in der es zu jeder Ziffer vier Zettel gibt, werden nacheinander vier Zettel zufällig gezogen und die gezogenen Ziffern an die Tafel geschrieben. Die Mannschaft, die als erste eine Lösung nennt, bekommt einen Punkt. Diese Spielidee verdanken wir einer 3. Klasse aus Boke (bei Delbrück im Kreis Paderborn). Wenn nach einer vorher festgelegten Zeit keine Lösung gefunden wurde, weil die Kombination zu schwer oder nicht lösbar ist, geht es weiter. Schließlich kann auch einzeln geknobelt werden. Hierzu kann die Kopiervorlage M 4 mit den 4 x 4-Tabellen benutzt werden, von denen jede 20 lösbare Kombinationen enthält, die Kinder einzeln oder kooperativ bearbeiten können.

Spielen mit Bruchzahlen
Das Ganze kann je nach Leistungsstand der Kinder noch dahingehend ausgereizt werden, dass im Sinne der Zone der nächsten Entwicklung auf den Spielkarten auch Bruchzahlen benutzt werden dürfen. Die Erfahrungen in einer vierten Klasse zeigen, dass Kinder hierzu durchaus in der Lage sind.

Fazit
Die hier dargestellte Lernumgebung eignet sich dazu, mit einer einfachen Idee mathematisch reichhaltige Lernprozesse bei den Kindern anzuregen. Es werden automatisierte Rechensätze erneut angewendet, Beziehungen zwischen Aufgaben erkannt und genutzt, flexibel Zahlen und Rechenoperationen miteinander kombiniert, viel im Kopf gerechnet, der Zahlensinn geschult, Strategien entwickelt und reflektiert (...) und das gleichermaßen für leistungsstarke Kinder wie auch leistungsschwache Kinder.

Literatur
- Spiegel, Hartmut; Götze, Daniela (2007): Rechenkonferenzen unter Kindern – Möglichkeiten, Chancen und methodische Umsetzung. In: Schipper, Wilhelm; Lorenz, Jens Holger (Hrsg.): Hendrik Radatz – Impulse für den Mathematikunterricht. Braunschweig: Schroedel, S. 28–36

Autoren
Prof. Dr. Hartmut Spiegel
Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Warburgerstraße 98
33098 Paderborn

Dr. Daniela Götze
Technische Universität Dortmund
Fakultät Mathematik
Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
Vogelpothsweg 87
44227 Dortmund

Name	Klasse	Datum

Setze ein

Setze in die Kästchen Zahlen so ein, dass die Rechnung stimmt.
Achtung: »Punktrechnung geht vor Strichrechnung«

$(\square + \square) \cdot \square - \square = \boxed{24}$

$(\square + \square) \cdot \square \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square + \square) \cdot \square : \square = \boxed{24}$

$(\square - \square) \cdot \square + \square = \boxed{24}$

$(\square - \square) \cdot \square - \square = \boxed{24}$

$(\square - \square) \cdot \square \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square - \square) \cdot \square : \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square + \square + \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square + \square - \square = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square + \square) \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square + \square) : \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square - \square - \square = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square - \square) \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square - \square) : \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square \cdot \square + \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square \cdot \square - \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \boxed{24}$

$\square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square : \square + \square = \boxed{24}$

$\square \cdot \square : \square - \square = \boxed{24}$

$(\square : \square + \square) \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square : \square - \square) \cdot \square = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) + (\square \cdot \square) = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) + (\square : \square) = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) - (\square \cdot \square) = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) - (\square : \square) = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) : (\square + \square) = \boxed{24}$

$(\square \cdot \square) : (\square - \square) = \boxed{24}$

$(\square + \square) \cdot (\square + \square) = \boxed{24}$

$(\square + \square) \cdot (\square - \square) = \boxed{24}$

$(\square - \square) \cdot (\square - \square) = \boxed{24}$

$((\square - (\square \cdot \square)) \cdot \square = \boxed{24}$

$((\square - (\square : \square)) \cdot \square = \boxed{24}$

397 Kombinationen

397 Zahlenkombinationen, für die es in vielen Fällen mehr als eine wesentlich verschiedene Lösung für die Zielzahl 24 gibt.

1118	1267	1479	2266	2477	3366	3777	4699
1126	1268	1488	2267	2478	3367	3778	4777
1127	1269	1489	2268	2479	3368	3779	4778
1128	1277	1556	2269	2488	3369	3788	4788
1129	1278	1559	2277	2489	3378	3789	4789
1134	1279	1566	2278	2499	3379	3799	4799
1135	1288	1567	2288	2557	3389	3888	4888
1136	1289	1568	2289	2558	3399	3889	4889
1137	1333	1569	2333	2559	3444	3899	4899
1138	1334	1578	2335	2566	3445	3999	5555
1139	1335	1579	2336	2567	3446	4444	5556
1144	1336	1588	2337	2568	3447	4445	5559
1145	1337	1589	2338	2569	3448	4446	5566
1146	1338	1599	2339	2577	3449	4447	5567
1147	1339	1666	2344	2578	3455	4448	5568
1148	1344	1669	2345	2579	3456	4449	5577
1149	1345	1679	2346	2588	3457	4455	5578
1155	1347	1688	2347	2589	3458	4456	5588
1156	1348	1689	2348	2666	3459	4457	5589
1157	1349	1699	2349	2667	3466	4458	5599
1158	1356	1779	2355	2668	3468	4468	5666
1166	1357	1788	2356	2669	3469	4469	5667
1168	1358	1789	2357	2678	3477	4478	5668
1169	1359	1799	2358	2679	3478	4479	5669
1188	1366	1888	2359	2688	3479	4488	5677
1224	1367	1889	2366	2689	3489	4489	5678
1225	1368	2223	2367	2699	3499	4555	5679
1226	1369	2224	2368	2778	3556	4556	5688
1227	1377	2225	2369	2788	3557	4557	5689
1228	1378	2227	2377	2789	3558	4558	5699
1229	1379	2228	2378	2888	3559	4559	5779
1233	1388	2229	2379	2889	3566	4566	5788
1234	1389	2233	2388	2899	3567	4567	5789
1235	1399	2234	2389	3333	3568	4568	5888
1236	1444	2235	2399	3334	3569	4569	5889
1237	1445	2236	2444	3335	3578	4577	6666
1238	1446	2237	2445	3336	3579	4578	6668
1239	1447	2238	2446	3337	3588	4579	6669
1244	1448	2239	2447	3338	3589	4588	6679
1245	1449	2244	2448	3339	3599	4589	6688
1246	1455	2245	2449	3344	3666	4599	6689
1247	1457	2246	2455	3345	3667	4666	6789
1248	1458	2247	2456	3346	3668	4667	6799
1249	1459	2248	2457	3347	3669	4668	6888
1255	1466	2249	2458	3348	3677	4669	6889
1256	1467	2255	2459	3349	3678	4677	6899
1257	1468	2256	2466	3355	3679	4678	7889
1258	1469	2257	2467	3356	3688	4679	
1259	1477	2258	2468	3357	3689	4688	
1266	1478	2259	2469	3359	3699	4689	

Lehrermaterial

4 x 4-Tabellen: 24-Quadrate

1	7	4	6
2	3	5	9
4	6	8	5
8	2	3	1

Das Quadrat liefert auf folgende Weise 20 verschiedene Zifferkombinationen zu vier Ziffern: Sie lassen sich bilden aus den Ziffern jeder der vier Zeilen, der vier Spalten, der beiden Diagonalen; der neun kleinen Viererquadrate und der vier Ziffern der äußeren Ecken. Aus jeder der 20 Ziffernkombinationen kann man einen Rechenausdruck (jede Ziffer einmal) bilden, der als Ergebnis 24 hat.
Beispiel für die 1. Zeile: $(7 + 1 - 4) \cdot 6 = 24$
Finde zu möglichst vielen Kombinationen mindestens eine Lösung und notiere sie!

Hier findest du noch weitere solche Quadrate:

1	2	4	9
4	3	5	3
6	2	8	1
7	8	6	9

1	8	2	5
2	1	3	4
8	6	4	9
3	9	7	6

9	1	7	2
7	6	2	5
1	4	6	8
4	9	3	4

1	3	9	6
5	8	5	4
2	6	3	7
8	4	2	1

Lehrermaterial