VII. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN

Abgabe: Do, 8. Dezember 2005 in der Übung

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/

13. Aufgabe: Sei A eine K-Algebra.

a) Sei $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Man zeige, dass $\mathrm{Kern}(f) \subset M$ bis auf Isomorphie eindeutig beschrieben ist als Modul L mit folgender "universellen" Eigenschaft:

(i) Es gibt ein $i \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ mit $f \circ i = 0$.

(ii) Ist L' ein Modul und $j \in \mathrm{Hom}_A(L',M)$ mit $f \circ j = 0$, so gibt es ein *eindeutiges* $h \in \mathrm{Hom}_A(L',L)$ mit $i \circ h = j$.

(Hinweis: Man zeige: 1. Der Kern hat eine solche Eigenschaft, und 2. jeder Modul K mit einer solchen Eigenschaft ist isomorph zum Kern. Wende bei 2. dabei die Eigenschaft (ii) mehrfach an.)

Sei B eine weitere K-Algebra und $F : \mathrm{mod}-A \longrightarrow \mathrm{mod}-B$ eine Äquivalenz von K-Kategorien.

b) Sei $f : M \longrightarrow N$ eine A-lineare Abbildung. Man zeige: $F(\mathrm{Kern}(f)) \simeq \mathrm{Kern}(F(f))$.

c) Man zeige, dass eine A-lineare Abbildung $f : M \longrightarrow N$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn die B-lineare Abbildung $F(f) : F(M) \longrightarrow F(N)$ ein Monomorphismus ist.

d) Man zeige, dass F projektive A-Moduln in projektive B-Moduln überführt.

(Hinweis: Verwende Eigenschaft (3) in Aufgabe 6. und ohne Beweis eine für Epimorphismen geltende analoge Aussage wie in c).)

e) Gilt d) auch, wenn man "projektiv" durch "frei" ersetzt? 20 P.

Genereller Hinweis zu a)—d): Man male sich zur Veranschaulichung Diagramme von linearen Abbildungen hin. Was macht ein Funktor mit solchen Diagrammen?