VI. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN

Abgabe: Do, 1. Dezember 2005 in der Übung

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/

11. Aufgabe: Sei $A \neq 0$ eine endlichdimensionale Algebra, so dass jeder endlich erzeugte A-Modul frei ist. Man zeige mit den Resultaten aus der Vorlesung, dass dann A eine Divisionsalgebra ist. 10 P.

12. Aufgabe: Wir betrachten hier beliebige Ringe und verallgemeinern Aufgabe 11. Erinnerung: Ein Ring $R \neq 0$ ist ein Schiefkörper, falls jedes Element $x \neq 0$ ein Links- *und* ein Rechtsinverses besitzt. (Diese sind dann notwendig gleich.)

a) Man zeige, dass ein Ring $R \neq 0$ ein Schiefkörper ist genau dann, wenn 0 und R die einzigen Rechtsideale sind.

b) Sei $R \neq 0$ ein Ring, über dem jeder endlich erzeugte R-Modul frei ist. Man zeige, dass R ein Schiefkörper ist. 10 P.

Hinweis: Es soll und darf folgende Tatsache benutzt werden: Jeder Ring $R \neq 0$ enthält ein maximales Rechtsideal I. (Dies folgt aus dem Zornschen Lemma; besprechen wir in der Übung.) Betrachte R/I.