I. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN

Abgabe: DO, 27. OKTOBER 2005 in der Übung

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/

1. Aufgabe: **a)** Sei A eine R-Algebra, G ein Monoid und AG die Monoidalgebra mit zugehörigen Einbettungen σ und ξ (vgl. Vorlesung). Man zeige, dass AG eine R-Algebra ist und $\sigma : A \longrightarrow AG$ ein Algebrenhomomorphismus.

b) Man zeige folgende "universelle Eigenschaft" von Monoidalgebren: Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von R-Algebren und $g : G \longrightarrow B$ ein Monoidhomomorphismus, so dass für alle $a \in A$ und $x \in G$ folgendes gilt: $f(a)g(x) = g(x)f(a)$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $h : AG \longrightarrow B$ von R-Algebren mit $h \circ \sigma = f$ und $h \circ \xi = g$.

c) Sei $G = \mathbb{N}_0$. Man zeige, dass AG isomorph ist zur Polynomalgebra $A[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten (von der Form $a_0 + Xa_1 + \cdots + X^n a_n$, wobei $aX = Xa$ gilt für alle $a \in A$). Man überlege sich, was die universelle Eigenschaft in (b) in diesem Fall bedeutet. 10 P.

2. Aufgabe: Seien K und L Untermoduln eines Moduls M. Man zeige:

a) Ist $K \subset L$, so gilt $(M/K)/(L/K) \simeq M/L$.

b) Es gilt $(L + K)/K \simeq L/(L \cap K)$. 10 P.

3. Aufgabe: Sei A eine R-Algebra. Man zeige, dass jede Darstellung $\varphi : A^{op} \longrightarrow \mathrm{End}(V_R)$ den R-Modul V in natürlicher Weise zu einem A-Rechtsmodul macht und umgekehrt. 10 P.