Stand: 27. Januar 2004

1. Kapitel: Was ist ein Graph?

Beispiel: Mannschafts-Wettkämpfe

- Def. 1.1: Graph, Knoten, Kanten, adjazent
- Nullgraphen, vollständige Graphen K_n, komplementäre Graphen

Isomorphie von Graphen

- Def. 1.2: Isomorphe Graphen
- Notwendige Bedingungen für Isomorphie
- Beispiel nicht-isomorpher Graphen mit gleicher Knoten-, Kanten- und Verzweigungsanzahl

Planarität

- Def. 1.4: eben, planar
- Das 3-Brunnen Problem, der vollständige bipartite Graph $K_{3,3}$
- Jordanscher Kurvensatz
- Satz 1.5: $K_{3,3}$ und K_5 sind nicht planar

Anzahl von Kanten in einem Graphen

- Def. 1.6: Inzidenz, Grad eines Knoten
- Satz 1.7: Summe der Grade = doppelte Kantenanzahl
- Folgerung 1.8: Anzahl der Knoten ungeraden Grades immer gerade
- Def. 1.9: Regulärer Graph vom Grad r
- Folgerung 1.10: Formel für Kantenanzahl von regulären Graphen

2. Kapitel: Zusammenhängende Graphen

- Def. 2.1: Weg, geschlossener Weg, Kreis, verbundene Knoten, Zusammenhang, Komponente, (geschlossener) Eulerweg

Königsberger Brückenproblem

- Satz 2.2: Notwendige und hinreichende Bedingung für einen geschlossenen Eulerweg
- Folgerung 2.3: Existenz eines Eulerwegs
- Def. 2.4: Euler-Graph

Ein Weg durch die Ausstellung

- Satz 2.5: Lösbarkeit des Ausstellungsproblems (Beweis mit Algorithmus)

Hamilton-Wege und -Kreise

- Das Dodekaeder-Puzzel von Hamilton; der Dodekaeder-Graph
- Def. 2.6: Hamilton-Weg, Hamilton-Kreis, Hamilton-Graph
- Def 2.7: Einfache Graphen
- Satz 2.8: Satz von Dirac (hinreichendes Kriterium für hamiltonsch)
- Satz 2.9: Notwendiges Kriterium für bipartite Graphen
- Touren des Springers auf dem $n \times n$ Schachbrett; Unlösbarkeit für ungerades n
- Satz 2.10: Der Petersen-Graph ist nicht-hamiltonsch

3. Kapitel: Einige Spiele und Puzzel

Stabilität eines Fachwerks

- Fachwerke, Stabilität, Scherung
- Der zugehörige bipartite Graph
- Satz 3.1: Ein Fachwerk ist stabil genau dann, wenn der zugehörige bipartite Graph zusammenhängend ist.

Irrgärten

- Beispiel: Der Irrgarten von Hampton Court
- Der zu einem bepflanzten Irrgarten gehörige Graph

Das 4-Würfel-Spiel

- Beschreibung des Spiels “Instant Insanity”
- graphentheoretische Formulierung und Lösung

4. Kapitel: Bäume

- Wiederholung: Kreise. Kreise der Länge 1, 2, 3, usw.
- Def. 4.1: Wald, Baum
- Satz 4.2: Sei G ein Graph mit n Knoten. Äquivalent sind: (a) G ist Baum; (b) G hat keine Kreise und hat $n-1$ Kanten; (c) G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten.
- Kreise und Bäume: Bewässern von Reisfeldern
- Def. 4.3: Kreisrang γ
- Formel $\gamma = m - n + 1$
- Def. 4.4: Spannbaum eines zusammenhängenden Graphen
- Minimale Anzahl von Spangen in einem stabilen Fachwerk
- Verbindungsprobleme: kostengünstiger Bau von Gasleitungssystemen
- Def. 4.5: Graphen mit Kosten. Minimalgerüste
- Greedy-Verfahren zur Berechnung von Minimalgerüsten (Algorithmus von Kruskal)
- Beweis für die Korrektheit des Verfahrens
- Rundreisen minimaler Kosten (Travelling Salesman Problem)
- Untere Schranken für die Kosten von Rundreisen
- Variante zur Berechnung von Minimalgerüsten: Entfernen der teuersten Kanten auf Kreisen

5. Kapitel: Zuordnungsprobleme

- Jobs und Bewerber
- Heiratsproblem
- Notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit
- Die Streuungsbedingung
- Beispiel für die Notwendigkeit der Streuungsbedingung
- Satz 5.1: Satz von Hall ("Heiratssatz") Die Streuungsbedingung ist hinreichend für die Lösbarkeit des Zuordnungsproblems
- Beweis des Satzes
- Streuungsbedingung: knapp erfüllt/immer übererfüllt
- Erläuterung des Beweisvorgehens an zwei Beispielen
- Transversalen von Systemen von Teilmengen einer endlichen Menge
- Satz 5.2: Hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz von Transversalen
- Lateinische Rechtecke und Quadrate
- Beispiel
- Satz 5.3: Jedes lateinische Rechteck lässt sich zu einem lateinischen Quadrat ergänzen

6. Kapitel: Planarität

- Wiederholung: eben/planar. K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar. Begründung für K_5 mittels Jordanschem Kurvensatz
- Teilgraphen
- Expansion und Kontraktion
- Satz 6.1: Satz von Kuratowski
- Beweis der einfachen Richtung
- Folgerung 6.2: Der Grötzsch-Graph ist nicht planar
- Folgerung 6.3: Der Petersen-Graph ist nicht planar (Übung)
- Satz 6.4: Die Formel von Euler
- Folgerung 6.5: 1. Eulersche Ungleichung
- Folgerung 6.6: Nichtplanarität von K_5
- Folgerung 6.7: 2. Eulersche Ungleichung
- Folgerung 6.8: Nichtplanarität von $K_{3,3}$
- Der Torus ("Autoreifen", "Schwimmring")
- Satz 6.9: Auf dem Torus sind die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ planar, d. h. haben dort ebene Darstellungen.
- Frage: n-m+f=? für ebene Darstellungen des K_5 und $K_{3,3}$ auf dem Torus
- Die Anzahl φ_n der n-Ecke
- 6.10 Formel $2m = \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 + \cdots$
- 6.11 Formel $f = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$
- Der duale Graph G^* zu einem zusammenhängenden, ebenen Graphen G
- Satz 6.12: Der duale Graph G^* zu einem zusammenhängenden, ebenen Graphen ist zusammenhängend und eben. Es gelten die Formeln $n^* = f$, $m^* = m$ und $f^* = n$. Es gilt $G^{**} \simeq G$.
- Die Platonischen Graphen
- Vollständig reguläre Graphen; Klassifizierung derselben

7. Kapitel: Färben von Graphen

- 7.1 Der 4-Farben-Satz
- 7.2 Der 5-Farben-Satz
- Reduktion auf 3-reguläre Graphen
- Die Formeln 7.3 $3n = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + \cdots$ und 7.4 $12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - 3\varphi_9 - \cdots$ für zusammenhängende, ebene, 3-reguläre Graphen (ohne Schlaufen)
- 7.5 Existenz von 2−, 3−, 4− bzw. 5-Ecken in zusammenhängenden, 3-regulären, ebenen Graphen.
- Beweis des 5-Farben-Satzes mittels Reduzierung von 2-, 3-, 4- und 5-Ecken
- 7.6 Der 7-Farbensatz für den Torus
- 7.7 Bemerkung: Es gibt Karten auf dem Torus, die 7-Farben benötigen (Übungsaufgabe)
- 7.8 Formel von Heawood für Oberflächen mit $g \geq 0$ Löchern
- Flächen-, Knoten- und Kantenfärbungen
- Satz 7.9: 4-Farben-Satz für Knotenfärbungen von zusammenhängenden, planaren Graphen ohne Schlaufen
- Beweis durch Zurückführung mittels des dualen Graphen auf den 4-Farben-Satz
- Satz 7.10: 3-Farben-Satz für Kantenfärbungen ebener, 3-regulärer Graphen mit Hamilton-Kreis.
- Beispiel: Dodekaeder-Graph
- Satz 7.11: Hat ein ebener, zusammenhängender, 3-regulärer Graph eine Färbung der Flächen mit ≤ 4 Farben, so hat er eine Kantenfärbung mit ≤ 3 Farben.
- Satz 7.12 (Grinberg): Notwendiges Kriterium für die Existenz eines Hamiltonkreises in einem ebenen Graphen über die Anzahl der Flächen inner- und außerhalb eines Hamiltonkreises.
- Beispiel: Der Herschel-Graph
- Satz 7.13: Charakterisierung von Graphen, deren Knoten sich mit 2 Farben färben lassen.