

## Projekt P12 zu Mathe am Computer, WS 2002/03

MICHAEL NÜSKEN, VOLKER KRUMMEL, OLAF MÜLLER

### Milchkaffee

Ein Körper mit der Temperatur  $u(t)$  befinde sich in einem Medium mit der Temperatur  $A(t)$ . Dann findet Wärmeaustausch in Richtung der niedrigeren Temperatur statt. Damit ändert sich  $u(t)$ , und zwar ist  $\Delta u = u(t + \Delta t) - u(t)$  für kleine  $\Delta t$  etwa proportional der Temperaturdifferenz  $u(t) - A(t)$  und dem Zeitintervall  $\Delta t$ . Daraus ergibt sich *Newtons Abkühlungsgesetz*

$$\dot{u}(t) = -\beta (u(t) - A(t))$$

mit einer Konstanten  $\beta$ , die beschreibt, wie schnell der Ausgleich stattfindet. (Bei einer Thermoskanne wird  $\beta$  kleiner sein als bei einer Kaffeetasse.)

#### Aufgabe P12.1 (Zubereitung).

Viele Menschen trinken gerne Kaffee mit Milch. Aber kaum jemand wird seinen Kaffee so heiss trinken, wie er gekocht wird. Zum Glück kühlt er mit der Zeit ab. Bei Oskar war das so: Sein Kaffee hat zu Anfang eine Temperatur von  $80^\circ\text{C}$  und ist nach 10 Minuten auf die wohlige Trinktemperatur von  $42^\circ\text{C}$  abgekühlt. Und dann ist da noch die Milch, die er gleich zu Anfang aus dem  $8^\circ\text{C}$  kalten Kühlschrank holt. Oskar trinkt Kaffee mit sehr viel Milch, der Milchanteil in seinem Kaffee beträgt 50%. Zur Kontrolle: Würde er nach 10 Minuten den Kaffee mit der Milch mischen, so hätte sein Milchkaffee eine Temperatur von  $28,8^\circ\text{C}$ .

- (i) Wann sollte Oskar seinen Kaffee mit der Milch mischen und trinken, wenn er ihn am liebsten mit  $42^\circ\text{C}$  hat? (Ein erster Versuch könnte  $\beta = 0.0025$  verwenden.)
- (ii) Erstelle Zeichnungen mit dem Temperaturverlauf von Kaffee (**brown**), Milch (**yellow**) und Mischung (**COLOR(RGB,1,0.8,0.4)**).
- (iii) Olgas Milchkaffee enthält nur 10% Milch, aber sie mischt Kaffee und Milch sofort und lässt die Mischung abkühlen. Wann kann sie ihren Milchkaffee genießen? (Olgas Milchkaffee ist etwas dunkler, vielleicht **COLOR(RGB,0.7,0.4,0.2)**.)

Ist Oskars oder Olgas Strategie schneller? Mit anderen Worten: Wäre es ein Vorteil oder ein Nachteil, wenn Oskar wie Olga Kaffee und Milch sofort mischt?

- (iv) Vermute eine Antwort.
- (v) Rechne beide Strategien durch.
- (vi) Erkläre. (Erstelle Zeichnungen, um Deine Erklärung zu untermalen.)

**Aufgabe P12.2** (Variationen).

Alles ist wie vorher, aber diesmal verlassen Oskar und Olga drei Minuten nach der Kaffeezubereitung zusammen mit Ihren Tassen das Gebäude. Draussen beträgt die Temperatur nur  $10^{\circ}\text{C}$ .

- (i) Wann hat Oskars und wann Olgas Kaffee die richtige Temperatur?
- (ii) Ist diesmal Oskars oder Olgas Strategie günstiger? Vermute zuerst, rechne dann und erkläre.
- (iii) Führt eigene Experimente durch: Kocht einen sehr heissen Kaffee und bestimmt den Wert von  $\beta$  für Eure Tasse. (Wie gut waren die erfundenen Werte?) Vergesst nicht, die Umgebungstemperatur zu messen! Wieviel Milch nehmt Ihr? Bei welcher Temperatur mundet der Kaffee am besten?  
...