```
> restart:
  with(LinearAlgebra):
  with(plots):
  with(plottools):
```
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined

```
> A:=<<1,2,3>|<4,5,6>|<7,8,9>>;
```
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(A);
```
$$0$$

```
> EigenValues(A);
```
$$\mathrm{EigenValues}\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

```
> ?Eigen
> Eigenvalues(A);
```
$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{15}{2}+\frac{3\sqrt{33}}{2} \\ \frac{15}{2}-\frac{3\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}$$

```
> v,Q:=Eigenvectors(A);
```
$$v, Q := \begin{bmatrix} \frac{15}{2}+\frac{3\sqrt{33}}{2} \\ \frac{15}{2}-\frac{3\sqrt{33}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{12} & \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12} & -2 \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6} & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Q^(-1) . A . Q;
```
$$\left[\frac{(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{132}\right.$$
$$+\left(\frac{(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}+\frac{5\,(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{198}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{12}\right)$$
$$+\left(\frac{7\,(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{4\,(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{44}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}\right),$$
$$\frac{(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{132}$$

$$+\left(\frac{(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}+\frac{5\,(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{198}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}\right)$$

$$+\left(\frac{7\,(-21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{4\,(3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(-33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{44}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}\right),\ 0\Bigg]$$

$$\Bigg[\frac{(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{132}$$

$$+\left(\frac{(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}+\frac{5\,(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{198}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{33}}{12}\right)$$

$$+\left(\frac{7\,(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{4\,(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{44}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{6}\right),$$

$$\frac{(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{132}$$

$$+\left(\frac{(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}+\frac{5\,(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{198}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{66}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}\right)$$

$$+\left(\frac{7\,(21+5\sqrt{33})\sqrt{33}}{396}+\frac{4\,(-3+\sqrt{33})\sqrt{33}}{99}-\frac{(33+\sqrt{33})\sqrt{33}}{44}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}\right),\ 0\Bigg]$$

$$[0\,,0\,,0]$$

```
> simplify(%);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2}+\frac{3\sqrt{33}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2}-\frac{3\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> v;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2}+\frac{3\sqrt{33}}{2} \\ \frac{15}{2}-\frac{3\sqrt{33}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Abiaufgabe 1982 mn, LK I, 1 (vergleiche Aufgabe 9.3)

Die Funktion

```
> f:= x->(x^2-4)/(x+3);
```

$$f := x \rightarrow \frac{x^2-4}{x+3}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse

```
> Y:={{x=0,txt="Y"}}: # für später
  <0,f(0)>;
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

Schnittpunkt(e) mit der x-Ache

```
> X:=map( z->z union { txt="N" }, { solve( f(x)=0, {x} ) } );
```

$$X := \{\{x = 2, txt = "N"\}, \{x = -2, txt = "N"\}\}$$

```
> subs( X[1], <x,f(x)> );
```

Achtung! X[1] ist jetzt sinnvoll, aber morgen vielleicht das andere...

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> map( subs, X, <x,f(x)> );
```

$$\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

Welche Punkte haben wir bisher?

```
> map( subs, X union Y, txt(x,f(x),D(f)(x)) );
```

$$\{"Y"\left(0, \frac{-4}{3}, \frac{4}{9}\right), "N"\left(2, 0, \frac{4}{5}\right), "N"(-2, 0, -4)\}$$

Erste Ableitung

```
> f1:=D(f);
```

$$f1 := x \rightarrow \frac{2\,x}{x+3} - \frac{x^2-4}{(x+3)^2}$$

Kandidaten für Extremstellen

```
> E:=map( `union`, { solve( f1(x)=0, {x} ) }, {txt="E"} );
```

$$E := \{\{x = -3 + \sqrt{5}, txt = "E"\}, \{x = -3 - \sqrt{5}, txt = "E"\}\}$$

Zum Nullsetzten braucht man den Zähler von $f(x)$, den wir uns zur Kontrolle anschauen.

```
> numer( f1(x) );
```

$$x^2 + 6\,x + 4$$

Zweite Ableitung

```
> D(f1);
  f2:=(D@@2)(f);
```

$$x \rightarrow \frac{2}{x+3} - \frac{4\,x}{(x+3)^2} + \frac{2\,(x^2-4)}{(x+3)^3}$$

$$f2 := x \rightarrow \frac{2}{x+3} - \frac{4\,x}{(x+3)^2} + \frac{2\,(x^2-4)}{(x+3)^3}$$

+ Andere Möglichkeit abzuleiten

Sind E tatsächlich Extrempunkte? Prüfen Vorzeichen der 2. Ableitung.

```
> simplify( map( subs, E, f2(x) ) );
```

$$\{\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\}$$

Präzisiere die Texte...

```
> E:=map( z->`if`( evalf(subs( z, f2(x) ))<0, subs("E"="H",z),
  subs("E"="T",z) ), E );
```

$$E := \{\{x = -3 - \sqrt{5}, txt = \text{"H"}\}, \{x = -3 + \sqrt{5}, txt = \text{"T"}\}\}$$

```
> map( simplify@subs, E, <txt,x,f(x),f1(x)> ):;
> map(z->map(expand,z),%);
```

$$\left\{ \begin{bmatrix} \text{"T"} \\ -3 + \sqrt{5} \\ -6 + 2\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{"H"} \\ -3 - \sqrt{5} \\ -6 - 2\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Wendestellen

```
> W:={ solve( f2(x)=0, {x} ) };
```

$$W := \{\ \}$$

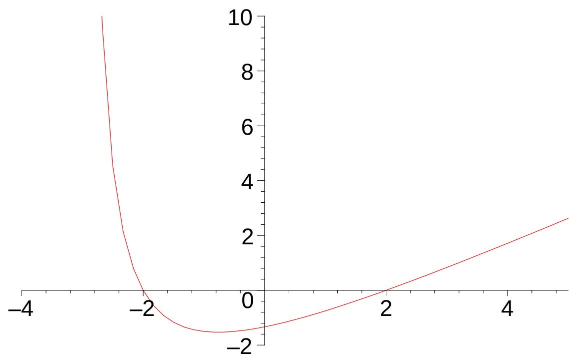
Kontrolle...

```
> numer( f2(x) );
```

$$10$$

Zeichne f

```
> plot(f,-4..5,-2..10,discont=true);
```



Ein Fehler und seine Entdeckung ...

Polstellen sind Nullstellen von 1/f.

```
> P:={ solve( (1/f)(x)=0, {x} ) };
```

$$P := \{\{x = -3\}\}$$

Asymptoten? Partialbruchzerlegung hilft!

```
> convert( f(x), parfrac, x );
```

$$x - 3 + \frac{5}{x + 3}$$

Also Asymptoten y=x-3, und x=-3.

Schönes Bild mit kritischen Punkten....

```
> ##############
> ?pointplot
> ?textplot
```

Aufgabenteil (ii)

```
> int( f(x)-(x-3), x=-2..u ):
  solve( % = 10, {u} );
```

$$\{u = \mathbf{e}^2 - 3\}$$

Aufgabenteil (iii): Bestimme das Rechteck max. Fläche in dem Flächenstück zwischen Kurve u
x-Achse.

Zuerst soll *r* die Funktion sein, die die Fläche in Abhängigkeit von der Höhe bestimmt.

```
> [solve(f(x)=-h,x)];
  h*(%[2]-%[1]):
  r:=unapply( %, h );
```

$$\left[-\frac{h}{2}+\frac{\sqrt{h^2+16-12\,h}}{2},-\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{h^2+16-12\,h}}{2}\right]$$

$$r := h \to -h\sqrt{h^2+16-12\,h}$$

Jetzt wollen wir *r* maximieren oder minimieren. (Wir haben nicht auf das Vorzeichen von *r* geachtet!)

```
> Lr:=[ solve( D(r)( h )=0, {h} ) ];
```

$$Lr := [\{h=1\},\{h=8\}]$$

```
> map( (z->map(expand,z))@subs, E, txt(x,f(x)) );
```

$$\{\text{"H"}(-3-\sqrt{5},-6-2\sqrt{5}),\text{"T"}(-3+\sqrt{5},-6+2\sqrt{5})\}$$

Die Höhe kann höchstens $-f(x_T)$ sein, wenn x_T die Tiefstelle ist. (Achtung! Vergleiche mit Wurzelausdrücken sind oft nicht möglich, da Maple das Vorzeichen der Wurzel nicht eigenmächtig entscheiden will. Aber mit `evalf` tut er es doch.)

```
> Lr:=select( z->
        subs(z,-h)>=evalf(-6+2*sqrt(5)),
        Lr );
```

$$Lr := [\{h=1\}]$$

Was sind also Höhe und Fläche?

```
> subs( Lr[1], [h,r(h)] );
```

$$[1,-\sqrt{5}]$$

Und was sind die Koordinaten der Ecken?

```
> ####################
```

Kritische Punkte bisher:

```
> K:=
  select( z->evalf(subs(z,x))>-3,
   Y union X union E union W
  );
```

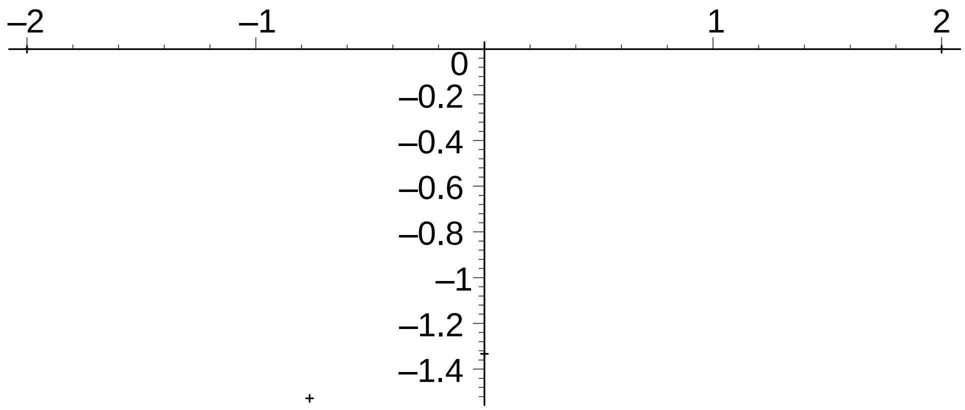
$$K := \{\{x=0,txt=\text{"Y"}\},\{x=2,txt=\text{"N"}\},\{x=-2,txt=\text{"N"}\},\{x=-3+\sqrt{5},txt=\text{"T"}\}\}$$

```
> ?pointplot
> Xpointplot( map( evalf@subs, K, [x,f(x)] ) );
```

Xpointplot({[0., -1.333333333], [2., 0.], [-2., 0.], [-0.763932023, -1.527864044]})

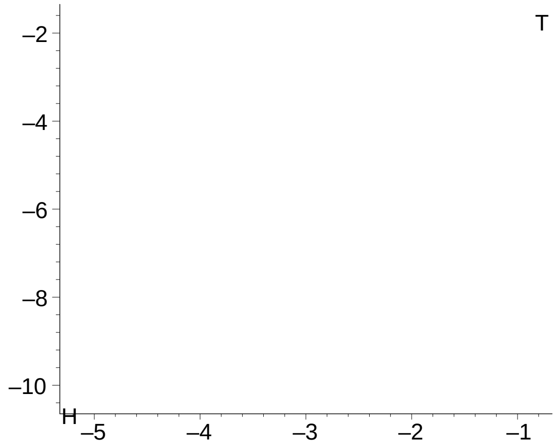
Kritische Punkte zeichnen

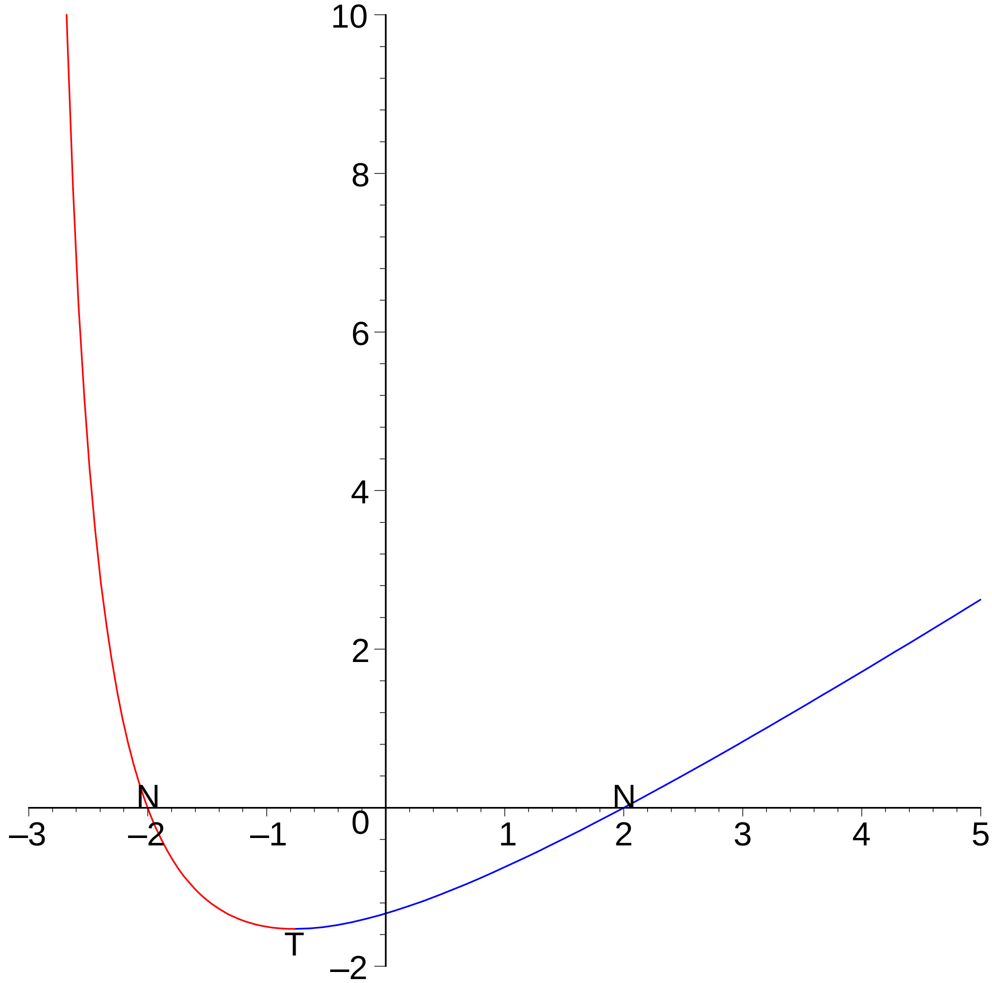
```
> pointplot( map( subs, K, [x,f(x)] ), scaling=constrained );
```



Texte zu kritischen Punkten schreiben und Graph in zwei Farben aufteilen.

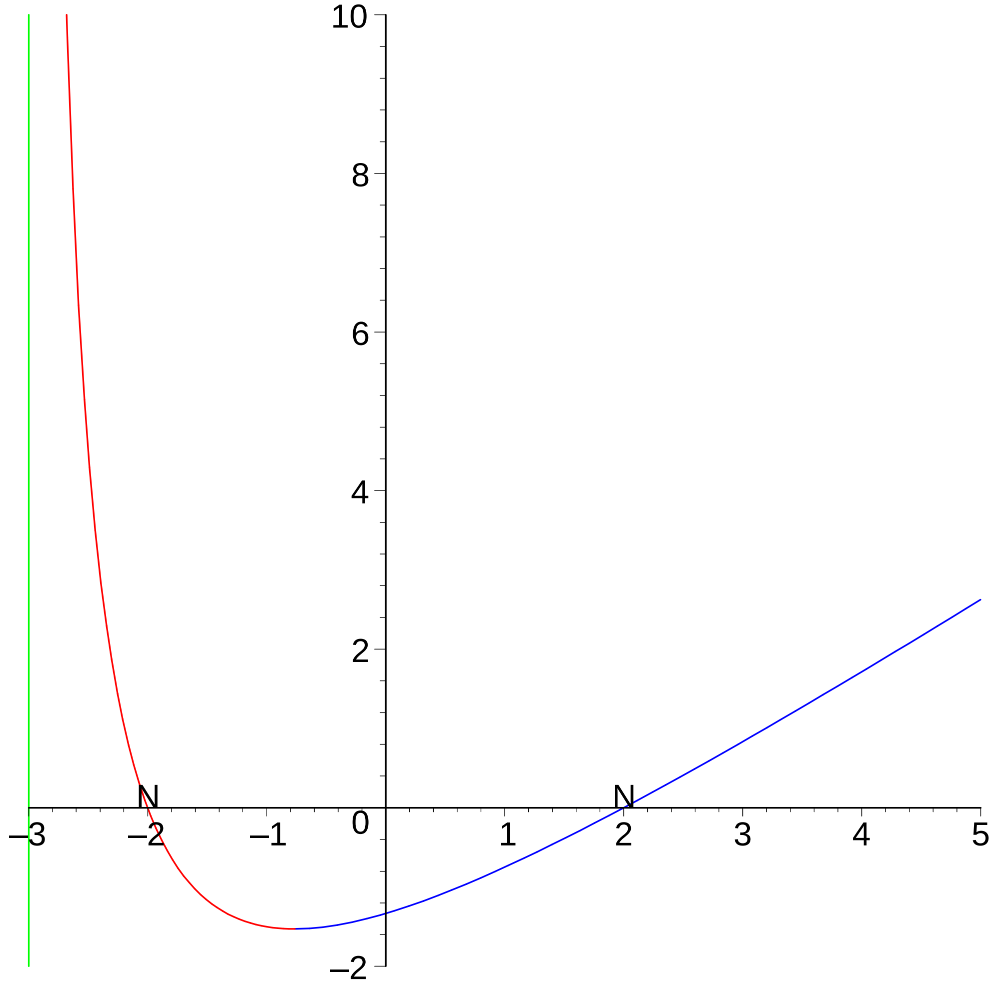
```
> textplot(
    map( subs, E, [ x, f(x), txt ] ),
    align={BELOW} );
  textplot(
    map( subs, X, [ x, f(x), txt ] ),
    align={ABOVE} ):
  P1:=display( [
      plot(f,-3..(-3+sqrt(5)),-2..10),
      plot( f, (-3+sqrt(5))..5,-2..10,color=blue),
      %%, % ] ):
  P1;
```





Noch eine Asymptote dazu...

```
> display( [P1, line( [-3,-2],[-3,10], color=green ) ] );
```



Tangenten an den kritischen Punkten hinzufügen???
>