

Musterlösung zu Aufgabe 4.1

```
> restart;
```

Zunächst schreiben wir eine Prozedur, die ein Tennisspiel simuliert. Eingabe ist die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler A einen Punkt macht. Dieses soll als rationale Zahl gegeben sein. Wir schreiben sie als Zähler/Nenner und erzeugen unseren Zufallszahlengenerator zuffi, der gleichverteilt Zahlen aus dem Bereich 1..nenner liefert. Für die ersten Zähler- und Nennerswerte sagen wir, dass A den Punkt gemacht hat. Dann ist die Wahrscheinlichkeit tatsächlich genau p. Ausgabe ist das Ergebnis des Spiels in Form einer Liste der erzielten Punkte.

```
> TennisSpiel := proc(p :: rational)
  local nenner, zaehler, zuffi, A, B;
  if p < 0 or p > 1 then ERROR ("p muß zwischen 0 und 1 liegen!"); fi;
  zaehler := numer(p);
  nenner := denom(p);
  zuffi := rand(1..nenner);
  A := 0; B := 0;
  while (A < 4 and B < 4) or abs(A-B) < 2 do
    if zuffi() <= zaehler then
      A := A + 1;
    else
      B := B + 1;
    fi;
  od;
  [A,B];
end;
```

Test die Prozedur:

```
> to 5 do
  TennisSpiel(55/100);
od;

[5, 3]
[4, 2]
[4, 2]
[4, 2]
[2, 4]
```

Mache einen ausführlicheren Testlauf für $p=55/100$. Beachte die Verwendung/Wirkung des Befehls `printf`.

```
> p := 55/100;
N := 2000;
P := 0;
W := 0;
to N do
  r := TennisSpiel(p);
  if r[1] > r[2] then
    W := W + 1;
  fi;
  P := P + r[1] + r[2];
od;
printf("Siege von A: %d\nGewinnwahrscheinlichkeit von A: %f\ndurchschnittliche Punkte
pro Spiel: %f\n", W, W/N, P/N);
```

```
Siege von A: 1220
Gewinnwahrscheinlichkeit von A: .610000
durchschnittliche Punkte pro Spiel: 6.758500
```

Anregung:

```
> ?printf
```

Als nächstes schreiben wir eine Prozedur, die N Tennisspiele mit Punktgewinnwahrscheinlichkeit p für Spieler A simuliert und die relative Häufigkeit der Siege des Spielers A zurückgibt:

```
> haefigkeiten := proc(N :: posint, p :: rational)
  local n, r;
  n := 0;
  to N do
    r := TennisSpiel(p);
    if r[1] > r[2] then n := n + 1; fi;
  od;
  n/N;
```

```
end:
```

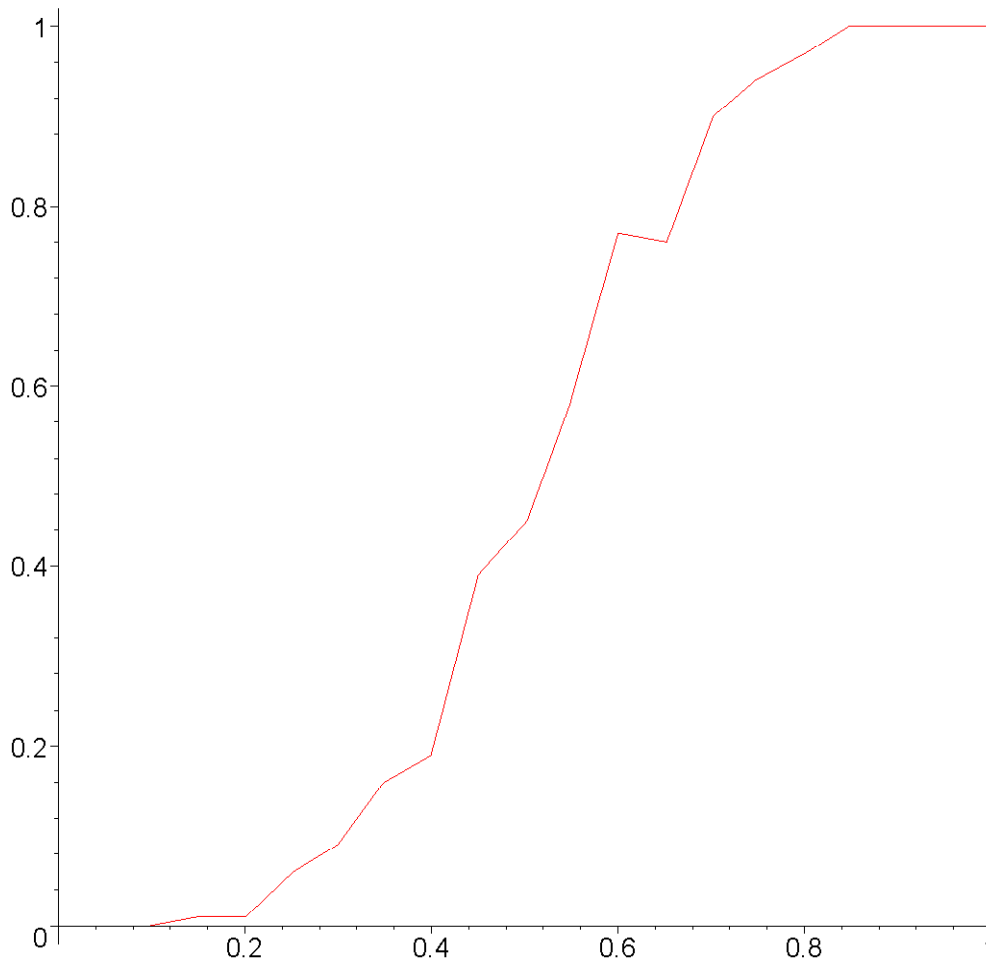
```
Ladevorsorglichdasplots-Paket:
```

```
> with(plots):
```

```
Nun wird haeufigkeiten für festes N und p von 0 bis 1 geplottet. Mit der Option numpoints=... gebe ich an, an wie vielen Stellen p die Funktion ausgewertet werden soll. adaptive=false bewirkt dabei, dass diese Stellen in (ungefähr) dem gleichen Abstand gewählt werden und nicht in Abhängigkeit von der Funktion (was Maple im Grunde sehr geschickt macht, aber unsere Funktion verhält sich durch den Zufall recht ungewöhnlich).
```

```
> st := time():
```

```
P1 := plot(p -> haeufigkeiten(100, convert(p,rational)), 0..1, numpoints = 21,  
adaptive = false, color = red);  
display(P1);  
time() - st;
```



1.082

Nun wollen wir uns eine Formel überlegen, die die approximierte Gewinnwahrscheinlichkeit angibt. Wir summieren dazu die Wahrscheinlichkeiten, mit denen Spieler A nach genau 4, 5, 6... Punktergebnis gewinnt. Nach 4 Punktergebnis gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p^4 . Wenn er nach 5 Punktergebnis gewinnen soll, muss Spieler B genau 1 der ersten 4 Punkte machen. Die Wahrscheinlichkeit ist $\text{binomial}(4,1) * p^3 * (1-p)$, wobei $\text{binomial}(4,1)$ der Binomialkoeffizient "4 über 1" ist und angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, den Zeitpunkt für den Punkt von B aus 4 Zeitpunkten auszuwählen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass A nach 5 Punktergebnis gewinnt $\text{binomial}(4,1) * p^3 * (1-p) * p$, denn den letzten Punkt muss A dann auch noch machen. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass A nach 6 Punktergebnis gewinnt $\text{binomial}(5,2) * p^4 * (1-p)^2 * p$ und mit Wahrscheinlichkeit $\text{binomial}(6,3) * p^3 * (1-p)^3$ kommt es zu einem Einstand. Dann kann noch beliebig oft (Summe von 0 bis unendlich für die Wahrscheinlichkeiten) jeder der beiden Spieler einen Punkt machen (jeweils Wahrscheinlichkeit $\text{binomial}(2,1) * p * (1-p) = 2 * p * (1-p)$, und zuletzt muß Spieler A noch zwei Punkte zum Teamstück machen. Maple vereinfacht das sofort zu einer recht kurzen Formel. (Daher Name poben auf 55/100 gesetzt wurde, müssen wir die Belegung erst wieder entfernen.)

```
> p := 'p':
```

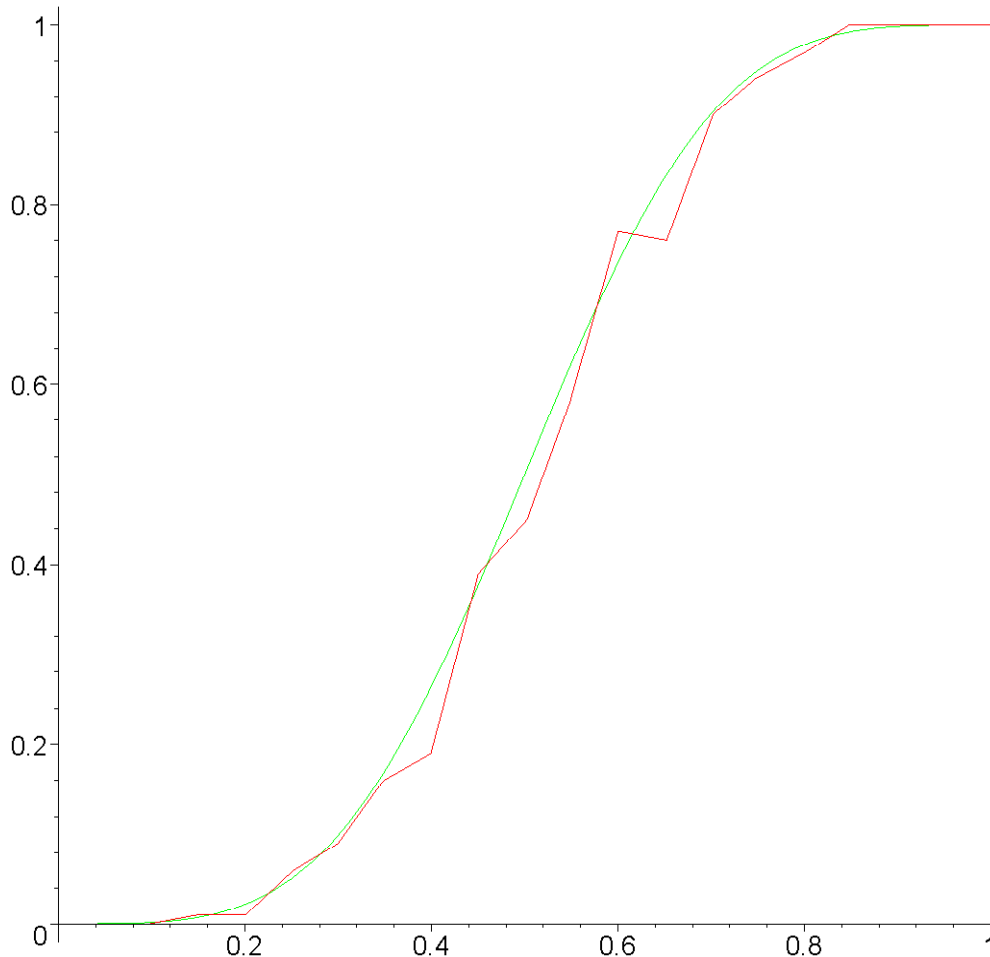
```
simplify(p^4 + binomial(4,1) * p^4 * (1-p) + binomial(5,2) * p^4 * (1-p)^2 +  
binomial(6,3) * p^3 * (1-p)^3 * sum( binomial(2,1) * p * (1-p) )^n, n = 0..infinity)  
* p^2);
```

$$-\frac{p^4(34p - 28p^2 - 15 + 8p^3)}{-2p + 2p^2 + 1}$$

Wir plotten den Funktionsgraph der Formel zusammen mit unseren Häufigkeiten. Die Formel scheint korrekt zu sein.

```
> F := p -> -p^4 * (34*p - 28*p^2 - 15 + 8*p^3)/(-2*p + 2*p^2 + 1);
P2 := plot(p -> F(p), 0..1, color = green);
display(P1,P2);
```

$$F := p \rightarrow -\frac{p^4(34p - 28p^2 - 15 + 8p^3)}{-2p + 2p^2 + 1}$$



Nun wollen wir untersuchen die durchschnittlichen Punkte pro Spiel. Analog zu den Häufigkeiten definieren wir ein Punktespiel:

```
> punktespiel := proc(N :: posint, p :: rational)
  local n, r;
  n := 0;
  to N do
    r := Tennisspiel(p);
    n := n + r[1] + r[2];
  od;
  n/N;
end;
```

Wie oben, nächstes Mal ein Plot der Häufigkeiten:

```
> st := time();
P3 := plot(p -> punktespiel(100, convert(p,rational)), 0..1, numpoints = 21,
  adaptive = false, color = red);
#display(P3);
time()-st;
```

0.851

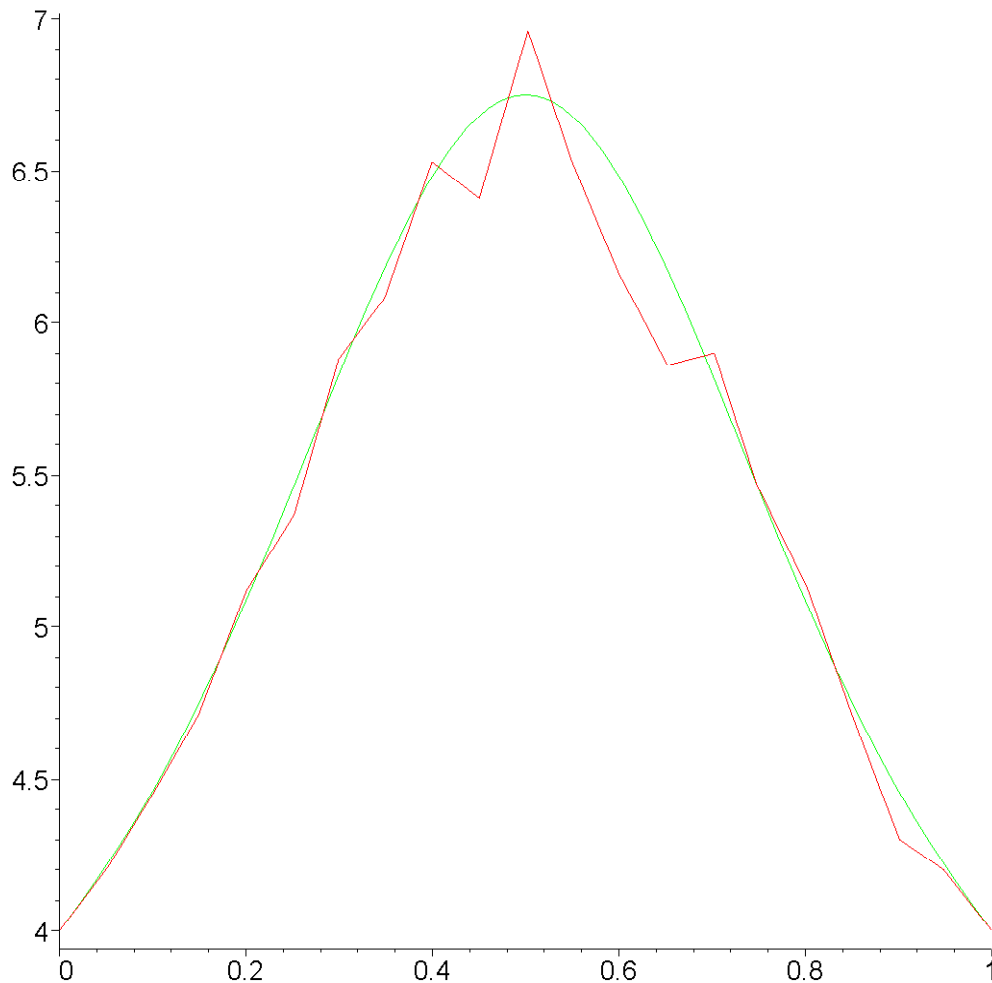
Nun brauchen wir eine Formel für den Erwartungswert der Punkte pro Spiel. Oben hatten wir unsere Formel schon nach den Punkten pro Spiel "sortiert". Wir müssen jetzt noch die Wahrscheinlichkeit für die Punkte auch den jeweiligen Werten schreiben.

Außerdem muss die symmetrische Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B nach eben so vielen Punktengewinn, berücksichtigt werden. Bei der unendlichen Summe überlegt man sich leicht, dass der n-te Summand in einem Spiel von $6+2n+2=8+2n$ Punkten entspricht.

```
> simplify(4 * (p^4 + (1-p)^4) +
  5 * (binomial(4,1) * p^4 * (1-p) + binomial(4,1) * (1-p)^4 * p) +
  6 * (binomial(5,2) * p^4 * (1-p)^2 + binomial(5,2) * (1-p)^4 * p^2) +
  binomial(6,3) * p^3 * (1-p)^3 * sum((8 + 2*n) * (binomial(2,1) * p * (1-p)
) ^n,
  n = 0..infinity) * (p^2 + (1-p)^2) );
```

$$\frac{4(-1+p-p^2+18p^4-6p^3-18p^5+6p^6)}{-2p+2p^2+1}$$

```
> G := p -> -4 * (-1 + 18*p^4 - 6*p^3 + p - p^2 - 18*p^5 + 6*p^6) / (-2*p + 2*p^2 + 1):
P4 := plot(p -> G(p), 0..1, color = green):
display(P3,P4);
```



[>