Das Tutte Polynom

Anna Barat

2. Dezember 2003

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei V die Menge der Knoten und E die Menge der Kanten ist. Sei $e \in E$ eine Kante in G. Dann bezeichne $G - e$ den Graph, der aus G durch Löschen der Kante e entsteht. Mit G/e bezeichnen wir den Graph, den wir aus G durch Löschen der Kante e und Zusammenkleben der Endknoten erhalten.

Definition 0.1. Bezeichne fr einen Graph H, und natürliche Zahl x mit $p_H(x)$, die Anzahl der Färbung von H mit der Farben $1, 2, \ldots, x$. $p_H(x)$ heißt, das Chromatische Polynom von H.

Lemma 0.2. *Für einen Graph G gilt:*

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x). \tag{1}$$

1 Einführung

Im Folgenden bezeichnen wir mit $G = (V, E)$ den Multigraphen, mit Knotenmenge V und Kantenmenge E, wobei Mehrfachkanten und Schleifen erlaubt sind.

Definition 1.1. Sei $G = (V, E)$ einen Multigraph. Wir bezeichnen mit $k(G)$ die Anzahl der Komponenten von G. Wir definieren den Rang $r(G)$ und die "nullity (Nichtigkeit) $n(G)$ von G wie folgt:

$$r(G) = |V| - k(G) = |G| - k(G) \tag{2}$$

und

$$n(G) = |E| - |V| + k(G). \tag{3}$$

Bemerkung 1.2. *Sei G ein Graph. Falls G aus k Zykeln besteht, dann gilt:*

$$n(G) = k, \tag{4}$$

das heißt, dass $n(G)$ die Anzahl der Zykeln von G misst.

Wir werden demnächst mit spannenden Teilgraphen arbeiten. Diese Teilgraphen identifiziert man mit der Kantenmenge: für $F \subset E$, bezeichnen wir mit $\langle F\rangle$ den Graph (V, F), und mit $r\langle F\rangle, n\langle F\rangle, k\langle F\rangle$ den Rang, Nichtigkeit und Anzahl der Komponenten dieses Graphes. Insbesondere ist $r\langle E\rangle = r(G), n\langle E\rangle = n(G)$ und $k\langle E\rangle = k(G)$.

Definition 1.3. Für einen Graph G, definieren wir das Tutte Polynom wie folgt:

$$(G; x, y) = T(G) = T_G(x, y) = \sum_{F \subset E(G)} (x-1)^{r(G)-r\langle F\rangle}(y-1)^{n\langle F\rangle}.$$

mathdisplay

Meistens werden wir die Abkürzung $T(G)$ fr das Tutte Polynom von G benutzen. Sei $\mathcal{G}$ die Menge aller Isomorphieklassen von endlicher Multigraphen. Dann ist das Tutte Polynom eine Abbildung

$$: \mathcal{G} \to \mathbb{Z}[x, y].$$

mathdisplay

Beispiel 1.4. *Das Tutte Polynom von dem n-Weg (P_n) ist: $T(P_n) = x^n$. Nach Definition ist:*

$$(P_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{F \subset E(G)\\ |F|=i}} (x-1)^{r(G)-r\langle F\rangle}(y-1)^{n\langle F\rangle} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x-1)^{n-i} = x^n.$$

mathdisplay

Satz 1.5. *Das Tutte Polynom hat die folgende Eigenschaft: $T_{E_n}(x, y) = 1$, wobei E_n bezeichnet den Graph mit n isolierten Knoten und*

$$T_G = \begin{cases} xT_{G-e} & \text{falls } e \text{ eine Brücke ist,} \\ yT_{G-e} & \text{falls } e \text{ eine Schleife ist,} \\ T_{G-e} + T_{G/e} & \text{falls } e \text{ weder eine Brücke noch eine Schleife ist.} \end{cases} \tag{5}$$

für alle $G \in \mathcal{G}$.

Wir werden diesen Satz später beweisen. Wir berechnen zuerst das Tutte Polynom mit der Hilfe des Satzes fr bestimmte Graphen.

2 Beispiele

Beispiel 2.1. *Ein Schleifengraph L_n ist ein Graph mit einem Knot und n Schleifen. Das Tutte Polynom von L_n ist: $T(L_n) = y^n$. Der Beweis geht mit Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $T(L_1) = yT(E_1) = y$ nach dem Satz 2.4. Für $n \geqq 2$ ist $T(L_n) = yT(L_{n-1}) = y * y^{n-1} = y^n$ nach Induktinsvoraussetzung. Damit haben wir die Aussage bewiesen.*

Beispiel 2.2. *Das Tutte Polynom des n-Kreises C_n ist:*

$$(C_n) = y + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}.$$

mathdisplay
Wir beweisen die obige Gleichheit mit Induktion nach n.
Für $n = 1$ ist $T(C_1) = T(L_1) = y$.
Für $n \geqq 2$ verwenden wir den Satz 2.4. Es gibt keine Brücke und keine Schleife in C_n. Also müssen wir den 3. Fall in der Rekursion betrachten. Fr eine beliebige Kante e aus C_n wird $C_n - e = P_{n-1}$, der Weg mit der Länge $n - 1$, und $C_n/e = C_{n-1}$. Nach Induktion gilt, dass $T(C_n/e) = y + x + x^2 + \cdots + x^{n-2}$. Und $T(P_{n-1}) = x^{n-1}$ wie oben gezeigt wurde. Also gilt:

$$(C_n) = T(G - e) + T(G/e) = y + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}.$$

mathdisplay Damit haben wir unsere Formel gezeigt.

Beispiel 2.3. *Das Tutte Polynom des Graphes I_n, mit zwei Knoten und n Kanten zwischen den zwei Knoten, ist:*

$$(I_n) = x + y + y^2 + \cdots + y^{n-1}.$$

mathdisplay Wir zeigen die obige Gleichheit mit Induktion nach n.
Fr $n = 1$ ist $T(I_1) = T(P_1) = x$.
Fr $n \geqq 2$ verwenden wir Satz 2.4. Es gibt keine Schelife und keine Brücke in I_n. Also gilt $T(I_n) = T(I_n - e) + T(I_n/e)$ für eine beliebige Kante e aus I_n. Da $I_n - e = I_{n-1}$, gilt nach Induktionsvoraussetzung: $T(I_n - e) = x + y + \cdots + y^{n-2}$. I_n/e ist die Schleifengraph, mit $n - 1$ Kanten. Deshalb ist $T(I_n/e) = T(L_{n-1}) = y^{n-1}$. Also gilt:

$$T(I_n) = T(I_n - e) + T(I_n/e) = x + y + \cdots + y^{n-2} + y^{n-1}.$$

Damit haben wir unsere Formel bewiesen.

Die folgende zwei Beispiele sind direkte Folgerung des Satzes 2.4.

Beispiel 2.4. *Wenn der Graph G b Brücken und l Schleifen hat und keine weitere Kanten, dann:* $T(G) = x^b * y^l$.

Beispiel 2.5. *Wenn wir G von Graph H erhalten durch hinzufgende b Brücken und l Schleifen, dann gilt:* $T(G) = x^b * y^l * T(H)$.

Beispiel 2.6. *Wenn G weder Brücken noch Schleifen hat, dann gilt die dritte Formel fr eine Kante e aus G, das heit, es gibt eine Kante $e \in E(G)$, so dass:* $T(G) = T(G - e) + T(G/e)$.

Bemerkung 2.7. *T ist die einzige Funktion auf Graphen, die die oben in Beispiel 3.4-3.6 beschriebene Eigenschaften hat.*

Beispiel 2.8. *Die Funktion T ist multiplikativ in dem sinne, dass wenn $G = \cup \star G1, G2$, wobei G_1,G_2 Teilgraphen von G sind, mit höchstens einem gemeinsammen Knot, dann gilt:* $T(G) = T(G_1) * T(G_2)$.

3 Beweis des Satzes 2.4

Definition 3.1. Das Rangerzeugende-Polynom fr einen Graph $G = (V, E)$ ist definiert wie folgt:

$$S(G; x, y) = \sum_{F \subset E(G)} x^{r(G) - r\langle F \rangle} y^{n\langle F \rangle} = \sum_{F \subset E(G)} x^{k\langle F \rangle - k\langle E \rangle} y^{n\langle F \rangle}.$$

Wir werden konventionell die Abkürzung $S(G) = S(G; x, y)$ benutzen, weil S ist Polynom in x und y ist, und S eine Funktion von G ist. Wir beschreiben die elementare Eigenschaften der Funktion S in unserem nächsten Satz.

Satz 3.2. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und $e \in E$. Dann*

$$S(G; x, y) = \begin{cases} (x+1)S(G - e; x, y) & \textit{falls } e \textit{ eine Brücke ist,} \\ (y+1)S(G - e; x, y) & \textit{falls } e \textit{ eine Schleife ist,} \\ S(G - e; x, y) + S(G/e; x, y) & \textit{falls } e \textit{ weder eine Brücke noch eine Schleife ist.} \end{cases}$$

Außerdem, $S(E_n; x, y) = 1$, wobei E_n der Graph mit n isolierten Knoten ist, fr $n \geqq 1$.

Proof. Seien $G' = G - e$, $G'' = G/e$, und schreiben wir demnächst r' und n' fr die Rang und Nichtigkeit Funktionen in G', bzw. r'' und n'', für die in G''. Betrachten wir die elementare Eigenschaften der obigene Funktionen, die wir später in unserem Beweis benutzten werden. Für $e \in E$ und $F \subset E - e$ gilt:

$$r\langle F\rangle = r'\langle F\rangle, n\langle F\rangle = n'\langle F\rangle$$
$$r\langle E\rangle - r\langle F \cup e\rangle = r''\langle E - e\rangle - r''\langle F\rangle = r(G'') - r''\langle F\rangle.$$

$$r\langle E\rangle = \begin{cases} r'\langle E - e\rangle + 1 & \text{falls } e \text{ eine Brücke ist,} \\ r'\langle E - e\rangle & \text{sonst.} \end{cases}.$$

und

$$n\langle F \cup e\rangle = \begin{cases} n''\langle F\rangle + 1 & \text{falls } e \text{ eine Schleife ist,} \\ r''\langle F\rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Teilen wir $S(G; x, y)$ folgendermaßen auf:

$$S(G; x, y) = S_0(G; x, y) + S_1(G; x, y),$$

, wobei

$$_0(G; x, y) = \sum_{F \subset E, e \notin F} x^{r\langle E\rangle - r\langle F\rangle} y^{n\langle F\rangle}$$

mathdisplay und

$$_1(G; x, y) = \sum_{F \subset E, e \in F} x^{r\langle E\rangle - r\langle F\rangle} y^{n\langle F\rangle}.$$

mathdisplay Die Mengen $E - e$, $E(G') = E(G - e)$ und $E(G'') = E(G/e)$ sind natürlich idenfiziert. Deshalb, nach der obigen Formel:

$$\begin{aligned} S_0(G; x, y) &= \sum_{F \subset E - e} x^{r\langle E\rangle - r\langle F\rangle} y^{n\langle F\rangle} \\ &= \begin{cases} \sum_{F \subset E(G')} x^{r'\langle E - e\rangle + 1 - r'\langle F\rangle} y^{n'\langle F\rangle} & \text{falls } e \text{ eine Brücke ist,} \\ \sum_{F \subset E(G')} x^{r'\langle E - e\rangle - r'\langle F\rangle} y^{n'\langle F\rangle} & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x * S(G - e; x, y) & \text{falls } e \text{ eine Brücke ist,} \\ S(G - e; x, y) & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
S_1(G;x,y) &= \sum_{F\subset E-e} x^{r\langle E\rangle - r\langle F\cup e\rangle} y^{n\langle F\cup e\rangle}\\
&= \begin{cases} \sum_{F\subset E(G'')} x^{r(G'')-r''\langle F\rangle} y^{n''\langle F\rangle+1} & \text{falls } e \text{ eine Schleife ist,}\\ \sum_{F\subset E(G'')} x^{r'(G'')-r''\langle F\rangle} y^{n''\langle F\rangle} & \text{sonst,}\end{cases}\\
&= \begin{cases} y * S(G/e;x,y) & \text{falls } e \text{ eine Schleife ist,}\\ S(G/e;x,y) & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

Addieren wir nun S_0 und S_1, und bemerken wir, dass falls e eine Brücke oder eine Schleife ist, dann $S(G/e;x,y) = S(G-e;x,y)$. Es ist klar, denn: falls e eine Schleife ist, dann $G/e \cong G-e$;
falls e eine Brücke ist, dann gilt auch die Aussage, weil $r''\langle E-e\rangle - r''\langle F\rangle = r'\langle E-e\rangle - r'\langle F\rangle$ und $n''\langle F\rangle = n'\langle F\rangle$ für alle $F \subset E-e$. Damit haben wir unsere Rekursion fr S bekommen. Schließlich, das letzte Teil des Satzes folgt direkt aus der Definition von S. □

Bemerkung 3.3. *Mit der Hilfe des Rangerzeugendes-Polynoms knnen wir das Tutte Polynom nach Defintion 2.2 folgendermaßen ausdrücken:* $T_G(x,y) = T(G;x,y) = S(G;x-1,y-1)$.

Der Satz 2.4. folgt direkt aus Satz 4.2. und der Bemerkung 4.3.

4 Spezielle Werte des Tutte Polynoms

Betrachten wir zuerst den Fall wobei $x,y \in \{1,2\}$, dann ist $T(G;x,y)$ die Anzahl der bestimmten Teilgraphen von G.

Satz 4.1. *Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann $T(G;1,1)$ ist die Anzahl der spannenden Bäume von G, $T(G;2,1)$ ist die Anzahl der Wälder in G, und $T(G;1,2)$ ist die Anzahl der zusammenhängenden spannenden Teilgraphen, und $T(G;2,2)$ ist die Anzahl der spannenden Teilgraphen.*

Proof. Alle Aussagen folgen direkt aus Defintion 2.2 von T.

$$(G;1,1) = \sum_{F\subset E(G)} 0^{r(G)-r\langle F\rangle} 0^{n\langle F\rangle} = |\{F : F\subset E(G), r\langle F\rangle = r(G) und n\langle F\rangle = 0.\}|,$$

mathdisplay und $F \subset E(G)$ ist die Kantenmenge der spannenden Bäume genau dann, wenn $r\langle F\rangle = r(G)$ und $n\langle F\rangle = 0$.
Ähnlich:

$$(G;2,1) = \sum_{F\subset E(G)} 1^{r(G)-r\langle F\rangle} 0^{n\langle F\rangle} = |\{F : F\subset und n\langle F\rangle = 0.\}|,$$

mathdisplay die Anzahl der Kantenmenge F, die einen Wald bilden.
Weiterhin:

$$T(G;1,2) = \sum_{F \subset E(G)} 0^{r(G)-r\langle F\rangle} 1^{n\langle F\rangle} = |\{F : F \subset E(G), r\langle F\rangle = r(G)\}|,$$

ist die Anzahl der zusammenhängenden spannenden Teilgraphen von G.
Schließlich:

$$T(G;2,2) = \sum_{F \subset E(G)} 1^{r(G)-r\langle F\rangle} 1^{n\langle F\rangle} = |\{F : F \subset E(G)\}| = 2^{|E(G)|}.$$

□

Wenden wir uns zum Chromatischen Polynom. Bemerken wir, dass $P_{E_n}(x) = x^n$. Nach Lemma 1.3. gilt:

$$P_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x). \tag{6}$$

für einen Graph G, und $e \in E(G)$.
Bemerken wir noch zwei weitere Eigenschaften des Chromatischen Polynoms. Zuerst, falls es eine Schleife auf einem Knot gibt, dann ist der Knot adjazent zu sich selbst, deshalb $p_G(x) = 0$, falls G eine Schleife enthlt. Offensichtlich, falls H der Graph ist, den wir von G enthalten, nachdem wir die vielfachere Kanten in G mit einfache Kanten ersetzen, dann $p_G(x) = p_H(x)$. Zweitens, falls e eine Brücke in G ist, dann

$$p_G(x) = \frac{x-1}{x} p_{G-e}(x). \tag{7}$$

Proof. Sei $G - e = G_1 \cup G_2$.Dann:

$$p_{G-e}(x) = p_{G_1}(x) p_{G_2}(x). \tag{8}$$

und

$$_G = p_{G_1}(x)(x-1)\frac{p_{G_2}(x)}{x} = p_{G-e}(x)\frac{x-1}{x}$$

mathdisplay □

Satz 4.2. *Das Chromatische Polynom $p_G(x)$ von einem Graph G ist:*

$$p_G(x) = (-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_G(1-x,0). \tag{9}$$

Proof. Nach der obigere Eiganschaften gilt die folgende Rekursion fr das Chromatische Polynom: $p_{E_n}(x) = x^n$, und

$$_G(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} p_{G-e}(x) & \text{falls } e \text{ eine Brücke ist,} \\ 0 & \text{falls } e \text{ eine Schleife ist,} \\ p_{G-e}(x) - p_{G\setminus e}(x) & \text{falls } e \text{ weder eine Brücke noch eine Schleife ist.} \end{cases}$$

mathdisplay Wir müssen deshalb noch zu zeigen, dass in der Aussage definierte $p_G(x)$ die obigere Rekursion erfüllt. Aus Satz 2.4. folgt: $p_{E_n} = x^n$. Falls e eine Brücke ist, dann nach dem Satz 2.4. gilt: $T_G(1-x,0) = (1-x)T_{G-e}(1-x,0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p_G(x) &= (-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_{G-e}(1-x,0) \\ &= (-1)(-1)^{r(G-e)} x^{k(G-e)} \frac{(1-x)}{x} T_{G-e}(1-x,0) \quad = \frac{x-1}{x} p_{G-e}(x). \end{aligned}$$

Damit ist die Rekursion in dem ersten Fall erfüllt.
Falls e eine Schleife ist, dann gilt nach dem Satz 2.4: $T_G(1-x,0) = 0T_{G-e}(1-x,0)$, also ist $p_G(x) = 0$, in diesem Fall.
In dem letzten Fall gilt widerum nach Satz 2.4, dass: $T_G(1-x,0) = T_{G-e}(1-x,0) + T_{G\setminus e}(1-x,0)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p_G(x) &= (-1)^{r(G)} x^{k(G)} (T_{G-e}(1-x,0) + T_{G\setminus e}(1-x,0)) \\ &= (-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_{G-e}(1-x,0) + (-1)(-1)^{r(G)} x^{k(G)} T_{G\setminus e}(1-x,0) \\ &= p_{G-e}(x) - p_{G\setminus e}(x) \end{aligned}$$

Damit haben wir die Rekursion für das angegebene Polynom gezeigt. Daraus folgt die Behauptung. $\square$