

Hirsch' Vermutung und d -step Conjecture

Zusammenfassung

Es ist nach wie vor eine offene Frage, ob der *Simplex-Algorithmus* mit einer bestimmten Pivot-Regel stets in polynomieller Zeit durchgeführt werden kann. Hirsch hat 1957 vermutet, daß der maximale Durchmesser $\Delta(d, n)$ eines Graphens eines d -dimensionalen Polytops mit n Facetten beschränkt ist durch $n - d$. Diese Vermutung konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden. Die Beantwortung ist von enormer wissenschaftlicher Bedeutung, denn die Frage, ob $\Delta(d, n)$ polynomiell in n und d wächst, steht in engem Zusammenhang mit der Frage, ob es eine Pivot-Regel gibt, so daß der Simplex-Algorithmus stets polynomielle Zeit benötigt.

In dieser Ausarbeitung wird zunächst die *Lineare Programmierung* und der *Simplex-Algorithmus* wiederholt. Anschließend beschäftigen wir uns mit der *Hirsch' Vermutung* und dazugehörigen Varianten. Ein weiterer Schwerpunkt wird die berühmte *d -step Conjecture* sein, deren Studium uns aufschlußreiche Einblicke in die Forschung zur Hirsch' Vermutung erlauben wird: Wir werden zunächst zeigen, daß die Korrektheit der beschränkten d -step Conjecture auch schon die Korrektheit der beschränkten Hirsch' Vermutung impliziert. Dieses Ergebnis werden wir anschließend beim Beweis der beschränkten 5-step Conjecture verwenden. Den Abschluß der Ausarbeitung bildet ein Blick auf bekannte Werte der Funktionen $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$.

Schriftliche Ausarbeitung von Martin Hirsch und Michael Hußmann
im Rahmen des Seminars *Kombinatorik*.

Sommersemester 2003 - Universität Paderborn

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Einführung in Polytope und Polyeder	3
3	Lineare Programmierung und Simplex-Algorithmus	6
3.1	Lineare Programmierung	6
3.2	Simplex-Algorithmus	7
3.3	Pivot-Regeln	8
3.4	Wichtige Resultate	9
4	Hirsch' Vermutung	10
4.1	Einführung in die Hirsch' Vermutung	10
4.2	Varianten der Hirsch' Vermutung	11
4.3	Hirsch' Vermutung für 0/1-Polytope	12
5	d-step Conjecture	14
5.1	Einführung in die d -step Conjecture	14
5.2	Grundlagen	14
5.3	Vorbereitung der Beweise	24
5.4	Beweis des Resultats	28
6	Schlegel-Diagramme und weitere Hilfsmittel	33
6.1	Schlegel-Diagramme	33
6.2	Weitere <i>Beweishilfsmittel</i>	35
7	Die Eigenschaft A	35
8	Beweis der 5-step Conjecture	38
9	Zusammenfassung und Ausblick	41
9.1	Resultate der beschränkten d -step Conjecture	42
9.2	Resultate der unbeschränkten d -step Conjecture	42
9.3	Strong d -step Conjecture	43
9.4	Allgemeines	43

Aufteilung der Ausarbeitung:

Kapitel 1 bis 5: Michael Hußmann

Kapitel 6 bis 9: Martin Hirsch

1 Einleitung

Die *Lineare Programmierung* ist in der Mathematik und der theoretischen Informatik ein wohl bekanntes Problem, welches in vielen verschiedenen Anwendungsbereichen auftaucht. Hier seien z.B. die Stichworte Transportproblem, Produktionsplanung, Verschnittproblem etc. genannt. Weitere Details zu mathematischen Methoden allein im Bereich Produktionsplanung finden sich z.B. in einem Papier von Kantorovich [13] wieder, welches bereits 1939 erschienen ist. An dieser Stelle wird deutlich, wie lange sich Wissenschaftler schon mit der *Linearen Programmierung* und den dazugehörigen Anwendungen beschäftigen.

Ein sehr bekanntes Verfahren für die *Lineare Programmierung* ist die so genannte *Simplex-Methode*, die 1947 von Dantzig [3] entwickelt wurde. Weitere Verfahren sind in [29] beschrieben.

In dieser Ausarbeitung soll das Simplex-Verfahren genauer untersucht werden. Dazu werden wir in Kapitel 2 den Begriff des *Polytops* und *Polyeders* sowie einige verwandte Begriffe einführen, denn das Simplex-Verfahren läßt sich sehr gut auf geometrische Sachverhalte zurückführen, die erstens anschaulicher sind und zweitens eine schöne Sichtweise auf ein abstraktes theoretisches Problem erlauben. Kapitel 3 wiederholt kurz den Begriff der *Linearen Programmierung* und geht dann genauer auf den *Simplex-Algorithmus* ein.

Nun zum Thema dieses Papiers: Es ist immer noch eine offene Frage, ob der Simplex-Algorithmus mit einer bestimmten Pivot-Regel stets in polynomieller Zeit durchgeführt werden kann oder nicht. Hirsch hat sich schon sehr früh mit dieser Frage befaßt und 1957 folgende Vermutung geäußert: Der maximale Durchmesser $\Delta(d, n)$ eines d -dimensionalen Polytops mit n Facetten ist beschränkt durch $n - d$.

Diese Vermutung wurde später von Klee und Walkup [19] für unbeschränkte Polyeder widerlegt, räumt aber trotzdem nicht die Frage aus dem Weg, wie sich die Funktion $\Delta(d, n)$ allgemein verhält: Der Wert von $\Delta(d, n)$ ist eine untere Schranke für den Aufwand des Simplex-Algorithmus mit einer beliebigen Pivot-Regel. Die Frage, ob $\Delta(d, n)$ polynomiell in n und d wächst, steht folglich in engem Zusammenhang mit der Frage, ob es eine Pivot-Regel gibt, so daß der Simplex-Algorithmus stets polynomielle Zeit benötigt.

Kapitel 4 wird die gerade skizzierten Sachverhalte genauer erläutern und dazu auch einige Varianten und Spezialfälle der Hirsch' Vermutung behandeln. An dieser Stelle soll lediglich das Interesse des Lesers mit dieser spannenden Frage geweckt werden.

Der Rest der Ausarbeitung wird einen Einblick in die Forschung der letzten Jahrzehnte rund um die Hirsch' Vermutung liefern. Dazu werden wir insbesondere die berühmte *d-step Conjecture* kennen lernen, deren Studium einige sehr interessante Resultate liefert: Wir werden zunächst zeigen, daß die Korrektheit der beschränkten d -step Conjecture auch schon die Korrektheit der beschränkten Hirsch' Vermutung impliziert. Dieses Ergebnis werden wir anschließend beim Beweis der beschränkten 5-step Conjecture verwenden. Zum Schluß der Ausarbeitung werfen wir einen Blick auf bekannte Werte der Funktionen $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$.

2 Einführung in Polytope und Polyeder

In diesem Kapitel werden verschiedene Begriffe wie *Polytop* und *Polyeder* sowie einige verwandte Begriffe eingeführt, um das Problem der *Linearen Programmierung* auf geometrische Art und Weise zu studieren. Hierzu wird es einige Beispiele geben, um das Verständnis zu erleichtern und das erlernte Grundlagenwissen zu festigen. Zu Beginn wollen wir die Begriffe *affin* und *konvex* vorstellen:

Definition 2.1 (Affiner Unterraum, affine Hülle)

- Punkte, Geraden, Ebenen etc. sind *affine Unterräume*.

- Die *Dimension* eines affinen Unterraums ist die Dimension des korrespondierenden Vektorraums.
- Affine Unterräume der Dimensionen 0, 1, 2 und $d-1$ im \mathbb{R}^d heißen *Punkte*, *Geraden*, *Ebenen* und *Hyperebenen*.
- Affine Unterräume können als Menge aller affinen Kombinationen einer endlichen Menge x_0, \dots, x_n von Punkten beschrieben werden:

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \text{ für } \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}.$$

Dies bezeichnet man auch als *affine Hülle* von x_0, \dots, x_n .

- Eine Menge K von $n \geq 0$ Punkten heißt *affin unabhängig*, falls seine affine Hülle Dimension $n-1$ besitzt, d.h. jede echte Untermenge von K hat eine kleinere affine Hülle.

Definition 2.2 (konvex, konvexe Hülle)

- Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, falls für zwei beliebige Punkte $x, y \in K$ auch das Liniensegment $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ in K enthalten ist.
- Die *konvexe Hülle* einer Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die kleinste konvexe Menge, die K enthält:

$$\text{conv}(K) := \bigcap \{K' \subseteq \mathbb{R}^d \mid K \subseteq K', K' \text{ konvex}\}.$$

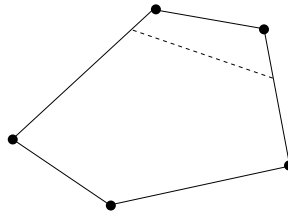


Abbildung 1: Konvexe Menge: Gestrichelte Strecke liegt vollständig innerhalb der Menge

Nun wollen wir auf den Begriff des *Polytops* zu sprechen kommen. In Anlehnung an Grünbaum [5] setzen wir voraus, daß alle Polytope, die wir in Zukunft betrachten, konvex sind.

Definition 2.3 (Polytop, Polyeder)

- Ein \mathcal{V} -*Polytop* ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten in einem \mathbb{R}^d .
- Ein \mathcal{H} -*Polyeder* ist der Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen in einem \mathbb{R}^d .
- Ein \mathcal{H} -*Polytop* ist ein \mathcal{H} -Polyeder, welches beschränkt ist in dem Sinne, daß es keinen Strahl $\{x + ty \mid t \geq 0\}$ enthält für ein $y \neq 0$.
- Ein *Polytop* ist eine Menge von Punkten $P \subseteq \mathbb{R}^d$, welche entweder durch ein \mathcal{V} -Polytop oder ein \mathcal{H} -Polytop dargestellt werden kann.
- Die *Dimension* eines Polytops ist die Dimension seiner affinen Hülle.
- Ein d -*Polytop* ist ein Polytop der Dimension d in einem \mathbb{R}^e ($e \geq d$).
- Zwei Polytope $P \subseteq \mathbb{R}^d$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ heißen *affin isomorph*, geschrieben $P \cong Q$, falls es eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ gibt, die eine Bijektion zwischen den Punkten beider Polytope ist.

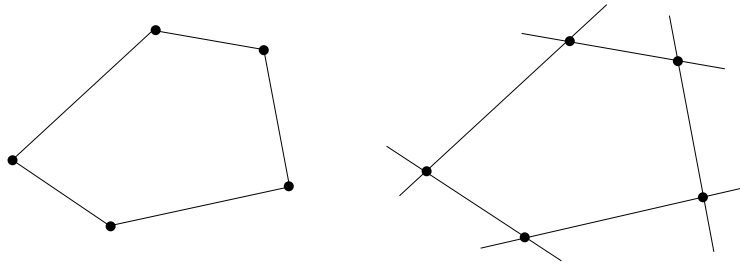


Abbildung 2: \mathcal{V} -Polytop (links) und \mathcal{H} -Polytop (rechts)

- 2-dimensionale Polytope heißen *Polygone*. Ein Polygon mit n Knoten heißt n -Eck.

In Zukunft setzen wir voraus, daß alle Polytope, die wir betrachten, volle Dimension haben, d.h. d bezeichnet sowohl die Dimension des Polytops als auch die Dimension eines \mathbb{R}^d . Kommen wir nun zum Begriff des *Simplex*:

Definition 2.4 (Simplex)

- Ein d -Simplex ist die konvexe Hülle von $d+1$ affin unabhängigen Punkten in einem \mathbb{R}^n ($n \geq d$). Folglich ist ein d -Simplex ein Polytop der Dimension d mit $d+1$ Knoten.
- Der *Standard d -Simplex* Δ_d mit $d+1$ Knoten im \mathbb{R}^{d+1} ist definiert als:

$$\Delta_d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\|_1 = 1\} = \text{conv}\{e_1, \dots, e_{d+1}\},$$

wobei e_1, \dots, e_{d+1} die Einheitsvektoren im \mathbb{R}^{d+1} sind.

- Ein Polytop heißt *einfach* (engl.: *simple*), falls bei d Dimensionen jeder Knoten zu exakt d Kanten inzident ist.

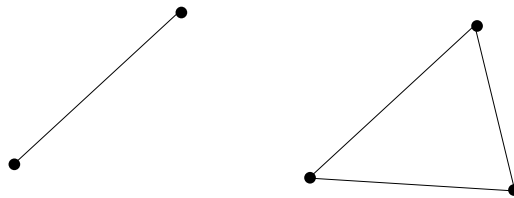


Abbildung 3: 1-Simplex (links) und 2-Simplex (rechts)

Um mit den gerade kennengelernten Gebilden wie Polytopen, Polyedern etc. wirklich arbeiten zu können, fehlen uns noch einige Terminologien:

Definition 2.5 (Knoten, Kanten, Gesichter, Facetten)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexes Polytop.

- Die lineare Ungleichung $cx \leq c_0$ heißt *erfüllt* für P , falls sie für alle Punkte $x \in P$ erfüllt ist.
- Ein *Gesicht* (engl.: *face*) von P ist eine Menge der Form

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid cx = c_0\},$$

so daß $cx \leq c_0$ eine gültige Ungleichung für P ist.

- Die *Dimension* eines Gesichts ist die Dimension seiner affinen Hülle und wird mit $\dim(F)$ bezeichnet.
- Ein *d-Gesicht* ist ein Gesicht der Dimension d .
- P ist ein Gesicht von sich selbst. Alle anderen Gesichter $F \subset P$ werden *echte* Gesichter von P genannt.
- Gesichter der Dimensionen 0, 1 und $\dim(P) - 1$ heißen *Knoten*, *Kanten* und *Facetten* (engl.: facets).
- Die Menge aller Knoten von P wird mit $\text{vert}(P)$ bezeichnet.
- Der *Verband der Gesichter* (engl.: *face lattice*) von P ist ein Poset $L(P)$, welche bzgl. Inklusion partiell geordnet ist.

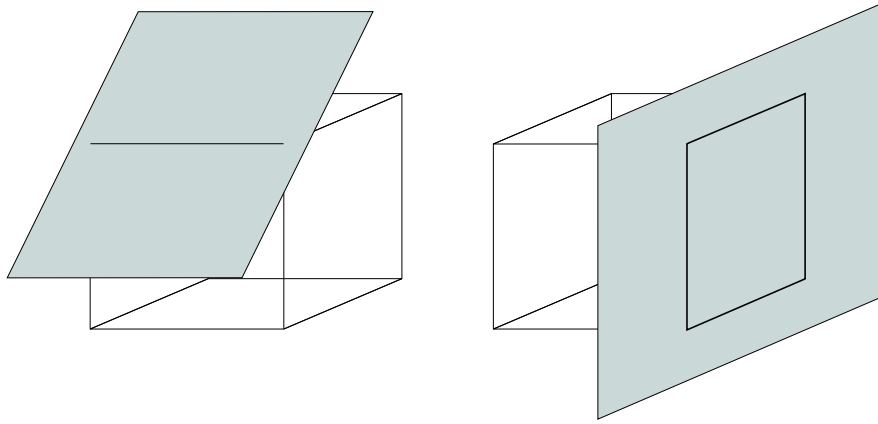


Abbildung 4: 1-Gesicht (links) und 2-Gesicht (rechts) eines Würfels

3 Lineare Programmierung und Simplex-Algorithmus

Nachdem im letzten Kapitel verschiedene Begriffe wie *Polytop* und *Polyeder* eingeführt wurden, wird dieses Kapitel zunächst den Begriff der *Linearen Programmierung* wiederholen und anschließend den *Simplex-Algorithmus* vorstellen.

3.1 Lineare Programmierung

Wir beginnen mit einer Definition, die auf dem vorherigen Kapitel aufbaut:

Definition 3.1 (Graph eines Polytops)

Sei P ein konvexes Polytop.

- Die Knoten und Kanten von P definieren einen abstrakten, endlichen, ungerichteten Graphen $G(P)$, der als *Graph von P* bezeichnet wird.
- Für jedes Gesicht $F \in L(P)$ bezeichnet $G(F)$ den *induzierten Teilgraphen* von $G(P)$ auf einer Teilmenge $\text{vert}(F) \subseteq \text{vert}(P)$ der Knoten von $G(P)$.

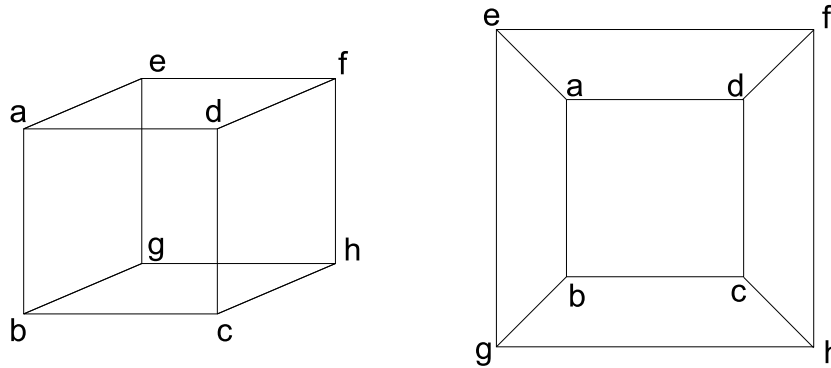


Abbildung 5: Ein Würfel und der zugehörige Graph

Das Problem der *Linearen Programmierung* kann mathematisch wie folgt aufgeschrieben werden:

Bestimme $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^d\}$, wobei:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times d}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^d$.
- $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax \leq b\}$ einfaches d -dimensionales Polytop (beschränkt) mit höchstens n Facetten.
- $c^T x$ nicht konstant entlang einer beliebigen Kante, d.h. keine zwei Knoten des Polytops erhalten denselben Wert.

Es muß also ein $x_0 \in P$ gefunden werden, welches die lineare Funktion cx maximiert: $cx_0 = \max\{cx \mid x \in P\} =: c_0$. Geometrisch gesprochen muß ein „höchster Punkt“ in einem Polytop oder Polyeder bzgl. einer linearen Höhenfunktion gefunden werden.

3.2 Simplex-Algorithmus

Das erste Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe wurde von 1947 von Dantzig [3] entwickelt und ist unter dem Begriff *Simplex-Algorithmus* bekannt geworden.

Die Idee des Algorithmus ist relativ einfach und läßt sich mit wenigen Worten beschreiben:

1. Finde Knoten v von P .
2. Bestimme einen Nachbarn w von v in $G(P)$, der einen größeren Wert bzgl. der linearen Funktion cx hat.
3. Wiederhole Schritt 2 bis keine Verbesserung mehr möglich ist.

Abbildung 6 zeigt einen möglichen Pfad des Simplex-Algorithmus zum höchsten Knoten in einem Polytop. Folglich ergibt sich die Frage, wie lang solche Pfade im schlimmsten Fall sein können, denn die Länge spielt eine wesentliche Rolle für die Laufzeit des Verfahrens, wie wir gleich noch sehen werden.

Unmittelbar nach der Entwicklung der Simplex-Methode konzentrierte man sich jedoch auf andere Bereiche: In den 50er Jahren wurde der theoretische Unterbau der Linearen Programmierung entwickelt und dabei das Problem auf verschiedene Anwendungsbereiche z.B. in der Industrie

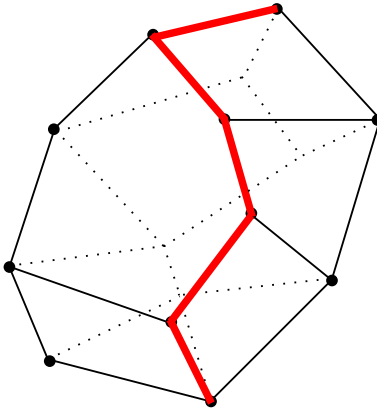


Abbildung 6: Ein möglicher Pfad zum höchsten Knoten im Simplex-Algorithmus

übertragen. Auch in den 60er Jahren war die Euphorie ungebrochen und führte zu weiteren Forschungen in diesem Bereich, auf die an dieser Stelle nicht genauer eingegangen werden soll.

Erst Anfang der 70er Jahre begann die Wissenschaft an der Effizienz der Simplex-Methode zu zweifeln. Weiter waren durch neue Entwicklungen im Bereich der Komplexitätstheorie neue Möglichkeiten zur Abschätzung der Berechnungskomplexität von Algorithmen entstanden. Klee und Minty [18] konnten 1972 zeigen, daß der Simplex-Algorithmus exponentielle Laufzeit haben kann, wenn man stets zu dem Nachbarknoten verzweigt, für den der Wert der linearen Höhenfunktion am größten ist (Pivot-Regel von Dantzig). Dazu erdachten die beiden sogenannte *Klee-Minty Cubes*, die so deformiert sind, daß es immer einen monotonen Pfad gibt, der durch alle Knoten geht. Auf weitere Details des Beweises soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Viele weitere Beispiele folgten in den darauffolgenden Jahren, die aber alle auf der Idee der Deformierung basierten.

Dieses Resultat besagt jedoch noch nicht, daß die Laufzeit des Simplex-Verfahrens für alle nur erdenklichen Pivot-Regeln im schlimmsten Fall stets exponentiell ist. Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit Pivot-Regeln beschäftigen, wollen wir die bisher gemachten Aussagen voneinander abgrenzen, um Mißverständnisse zu vermeiden:

Wäre die Länge der Pfade stets polynomiell in d und n , so wäre die Laufzeit des Simplex-Verfahrens auch immer polynomiell. Dies ist aber laut Klee und Minty nicht der Fall. Auf der anderen Seite impliziert die Existenz von Pfaden mit exponentieller Länge nicht zwingend, daß es kein Verfahren gibt, welches die Lineare Programmierung nicht stets in polynomieller Zeit bewältigen kann. Hier muß zwischen zwei Arten von Verfahren unterschieden werden: Simplex-Verfahren verzweigen durch Anwendung bestimmter Kriterien (Pivot-Regeln) zu einem konkreten Nachbarn eines Knotens. Verfahren der zweiten Sorte gehen nach vollkommen anderen Maßstäben vor. Wir wollen diese aus Zeitgründen hier nicht behandeln und verweisen stattdessen auf einen Artikel von Todd [29].

3.3 Pivot-Regeln

Wir bleiben also bei den Simplex-Verfahren: Wie bereits erwähnt wurde, unterscheiden sich die einzelnen Varianten untereinander nur dadurch, nach welchen Kriterien (Pivot-Regeln) zu bestimmten Nachbarknoten verzweigt wird. Nachdem Klee und Minty gezeigt hatten, daß der Simplex-Algorithmus mit der Pivot-Regel von Dantzig exponentielle Laufzeit haben kann, versuchten zahlreiche Wissenschaftler andere Pivot-Regeln zu finden, für die das Simplex-Verfahren stets polynomielle Zeit benötigt.

Bis heute war man auf diesem Gebiet aber noch nicht erfolgreich: Tabelle 1 liefert einen Überblick

über entwickelte Pivot-Regeln und die Zeitpunkte der Veröffentlichung entsprechender Gegenbeispiele [7], die zu exponentiellen Laufzeiten führen.

Pivot-Regel	Gegenbeispiel
Dantzig	Klee & Minty, 1972
Bland	Avis & Chvátal, 1978
Greatest Increase	Jeroslow, 1973
Steepest Edge	Goldfarb & Sit, 1979
Shadow Vertex	Goldfarb, 1983

Tabelle 1: Pivot-Regeln und Gegenbeispiele

Damit die Tabelle nicht für sich allein steht, werden wir einige Pivot-Regeln kurz erläutern:

Mit „Dantzig“ wird die erste Pivot-Regel bezeichnet, die vom Erfinder des Simplex-Algorithmus Dantzig selbst stammt. Bei dieser Regel wird stets zu dem Nachbarknoten verzweigt, für den der Wert der linearen Höhenfunktion am größten ist.

Bei der „Bland“-Regel werden die einzelnen Bedingungen des Problems, d.h. die verschiedenen Ungleichungen, durchnummeriert. Befindet man sich im Algorithmus gegenwärtig bei einem Knoten v , so erfüllt v genau d dieser Bedingungen mit Gleichheit, d.h. v liegt im Schnitt von d Facetten des entsprechenden Polytops. Da ein zu v adjazenter Knoten w in $d - 1$ dieser Facetten liegt, wird beim Verzweigen von v nach w exakt eine dieser Bedingungen überflüssig. Die Pivot-Regel schreibt deshalb vor, immer zu dem Nachbarknoten zu verzweigen, so daß eine Bedingung mit möglichst niedrigem Index überflüssig wird.

Bei der Pivot-Regel „Steepest Edge“ wird der Nachbarknoten w eines Knotens v gewählt, so daß eine möglichst schnelle Steigerung der linearen Höhenfunktion erreicht wird. Im Gegensatz zur Dantzig-Regel bezieht man sich also nicht nur auf die Werte der Höhenfunktion, sondern auch auf die Länge der Kanten. Die Idee dahinter ist simpel: Hat ein Nachbarknoten w den größten Wert bzgl. der linearen Höhenfunktion, so muß der kürzeste Pfad zum höchsten Knoten nicht zwingend über w verlaufen.

Die Motivation für die „Shadow Vertex“ Pivot-Regel ist die Tatsache, daß die Lineare Programmierung in zwei Dimensionen trivial ist. Man projiziert also einfach das Polytop auf ein konvexes Polygon, was den Namen „Shadow Vertex“ erklärt. Wichtig ist, daß die Projektion folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Der höchste Knoten landet am Rand des Polygons.
2. Der Startknoten landet am Rand des Polygons.

Auf diesem konvexen Polygon wird dann das Problem der Linearen Programmierung gelöst, was wie gesagt in diesem Fall sehr einfach ist.

Genauere Informationen zu den verschiedenen Pivot-Regeln finden sich im Buch von Chvátal [2].

3.4 Wichtige Resultate

Zum Abschluß des Kapitel wollen wir noch zwei Resultate vorstellen, die unserer Ansicht nach nicht ungenannt bleiben dürfen:

1982 konnte Borgwardt [1] zeigen, daß die durchschnittliche Anzahl vom Simplex-Algorithmus benötigten Schritten polynomiell ist, wenn zufällige Eingaben zugrunde gelegt werden. Ähnliche Entdeckungen machte auch Smale [25, 26].

Spielman und Teng [27] untersuchten das Simplex-Verfahren nach einem anderen Ansatz: Ihrer Ansicht nach ist es ein Problem, daß Algorithmen stets nur mit worst-case-Analysen oder average-case-Analysen untersucht werden. Bei worst-case-Analysen wird ein Verfahren häufig zu pessimistisch betrachtet. Dies ist vor allem beim Simplex-Verfahren ein Nachteil, denn dieses verhält sich in der Praxis recht gut und bisher bekannte worst-cases, die zu exponentieller Laufzeit führen, sind allesamt konstruierte Beispiele, die so in der Praxis nicht auftreten. Aber auch die average-case-Analyse ist nicht so gut, wie ihr Name verlaudet: Tatsächlich bilden zufällige Eingaben nicht immer die Eingaben ab, die auch in der Praxis auftreten.

Spielman und Teng schlagen stattdessen eine andere Art der Analyse vor, welche sie als *geglättete Analyse* (engl.: smoothed analysis) bezeichnen. Hierbei wird die Laufzeit eines Algorithmus für kleine, zufällige Abweichungen beliebiger Eingaben gemessen. Für weitere Details verweisen wir auf den entsprechenden Artikel. Spielman und Teng konnten 2001 zeigen, daß der Simplex-Algorithmus mit der Pivot-Regel „Shadow-Vertex“ polynomielle Laufzeit bei der geglätteten Analyse besitzt.

4 Hirsch' Vermutung

Dieses Kapitel behandelt die Hirsch' Vermutung von 1957, die bereits in der Einleitung grob geschildert wurde.

4.1 Einführung in die Hirsch' Vermutung

Bevor wir uns damit genauer beschäftigen, muß der Begriff des *Durchmessers* noch definiert werden:

Definition 4.1 (Durchmesser, maximaler Durchmesser)

- Der *Durchmesser* (engl.: *diameter*) $\delta(G)$ eines Graphens G ist die kleinste Zahl δ , so daß zwischen zwei beliebigen Knoten in G stets ein Pfad mit höchstens δ Kanten existiert.
- Für $n > d \geq 2$ sei $\Delta(d, n)$ der *maximale Durchmesser* eines Graphens eines d -dimensionalen Polytops mit höchstens n Facetten.
- Analog sei $\Delta_u(d, n)$ der maximale Durchmesser im unbeschränkten Fall, d.h. $n \geq d \geq 2$.

Beispiel 4.2 (Maximaler Durchmesser)

Es ist leicht einzusehen, daß folgendes gilt:

$$\Delta(2, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \quad \Delta_u(2, n) = n - 2.$$

Abbildung 7 zeigt beide Varianten für den Fall $n = 8$.

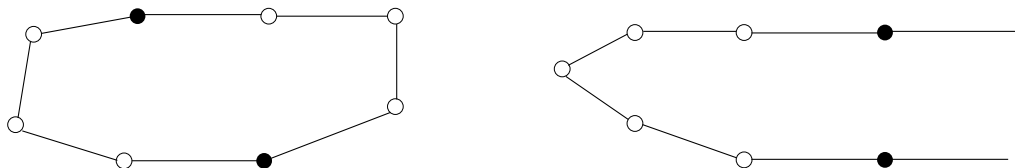


Abbildung 7: Max. Durchmesser im Fall $d = 2$ und $n = 8$

Wie bereits mehrfach erwähnt, stellte Hirsch 1957 folgende Vermutung auf:

Vermutung 4.3 (Hirsch' Vermutung)

Für $n > d \geq 2$ gilt:

$$\Delta(d, n) \leq n - d.$$

Es ist bis heute unbekannt, ob diese Vermutung korrekt ist oder nicht. Der unbeschränkte Fall konnte 1967 von Klee und Walkup [19] widerlegt werden.

Zunächst ist es sicher interessant zu wissen, wieso Hirsch gerade $n - d$ als obere Schranke vermutete. Dies liegt in der Tatsache begründet, daß Hirsch seine Überlegungen auf Würfel beliebiger Dimension konzentriert hatte. Für diese beträgt der maximale Durchmesser nämlich stets $n - d$, wobei $n = 2d$ die Anzahl der Seitenflächen und d die Dimension des Würfels ist. Der maximale Durchmesser für beliebig-dimensionale Würfel beträgt folglich d .

Offen bleibt aber die Frage, wie sich die Funktion $\Delta(d, n)$ allgemein verhält: Der Wert von $\Delta(d, n)$ ist eine untere Schranke für den Aufwand des Simplex-Algorithmus mit einer beliebigen Pivot-Regel. Die Frage, ob $\Delta(d, n)$ polynomiell in n und d wächst, steht folglich in engem Zusammenhang mit der Frage, ob es eine Pivot-Regel gibt, so daß der Simplex-Algorithmus stets polynomielle Zeit benötigt. Die beste zur Zeit existierende obere Schranke geht auf Kalai und Kleitman [12] zurück und ist mit $n^{1+\log d}$ zwar schon subexponentiell, aber auch immer noch superpolynomiell.

Die restlichen Abschnitte dieses Kapitels befassen sich mit Varianten der Hirsch' Vermutung. Weiter werden wir zeigen, daß die Hirsch' Vermutung für sogenannte *0/1-Polytope* immer erfüllt ist. Der Rest der Ausarbeitung wird sich auf die sogenannte *d-step Conjecture* konzentrieren.

4.2 Varianten der Hirsch' Vermutung

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Varianten der Hirsch' Vermutung kennenlernen. Dazu benötigen wir zunächst einen weiteren Begriff:

Definition 4.4 (Monotoner Pfad)

Sei cx eine lineare Höhenfunktion auf einem Polytop P . Ein *monotoner Pfad* in P ist ein Pfad, so daß für zwei aufeinanderfolgende Knoten u und v stets gilt: $cu < cv$.

Ausgehend von dieser Definition läßt sich eine *monotone Hirsch' Vermutung* formulieren:

Vermutung 4.5 (Monotone Hirsch' Vermutung)

Sei cx eine lineare Höhenfunktion auf einem d -dimensionalen Polytop P mit höchstens n Facetten und v ein Knoten von P . Dann gibt es einen monotonen Pfad mit höchstens $n - d$ Kanten von v zu einem Knoten v_{max} in P , der cx maximiert.

Im Gegensatz zu der vorher kennengelernten Vermutung ist dies jedoch keine wirkliche Vermutung mehr, denn Todd [28] konnte diese 1980 widerlegen. Wir wollen dieses Resultat an dieser Stelle jedoch nicht beweisen, sondern verweisen auf die entsprechende Literatur.

Ausgehend von der monotonen Hirsch' Vermutung läßt sich eine weitere Variante formulieren:

Vermutung 4.6 (Strikt monotone Hirsch' Vermutung)

Sei P ein d -dimensionales Polytop mit n Facetten und cx eine lineare Funktion in allgemeiner Position bzgl. P . Dann gibt es einen monotonen Pfad mit höchstens $n - d$ Kanten von einem (eindeutigen) Knoten v_{min} , der cx minimiert, zu einem (eindeutigen) Knoten v_{max} , der cx maximiert.

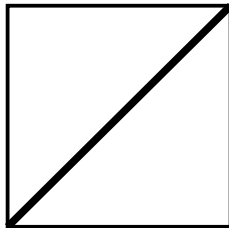
Diese Vermutung konnte aber ebenso wie die ursprüngliche Hirsch' Vermutung bis jetzt weder bestätigt noch widerlegt werden.

4.3 Hirsch' Vermutung für 0/1-Polytope

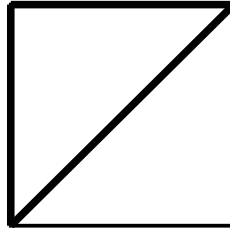
Während die Hirsch' Vermutung für allgemeine Polytope weiterhin eine offene Frage ist, konnte sie bereits 1989 von Naddef [22] für die Klasse der *0/1-Polytope* bewiesen werden. Kleinschmidt und Onn [21] verallgemeinerten dieses Ergebnis für den Durchmesser integraler Polytope. Wir wollen zunächst den Begriff des *0/1-Polytops* kennenlernen:

Definition 4.7 (0/1-Polytope)

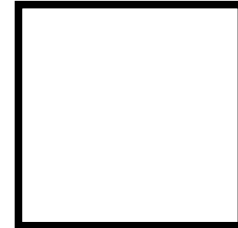
0/1-Polytope sind Polytope, für die die Koordinaten aller Knoten entweder 0 oder 1 sind. Folglich ist ein *0/1-Polytop* die konvexe Hülle einer Teilmenge von Knoten eines Einheitswürfels.



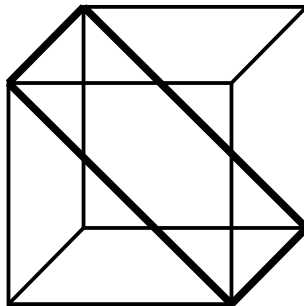
$$\begin{aligned} d &= 2 \\ \dim(P) &= 1 \\ \delta(G(P)) &= 1 \end{aligned}$$



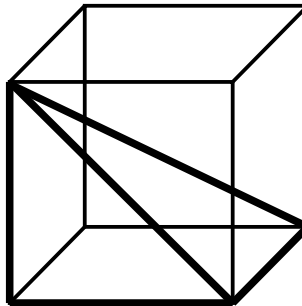
$$\begin{aligned} d &= 2 \\ \dim(P) &= 2 \\ \delta(G(P)) &= 1 \end{aligned}$$



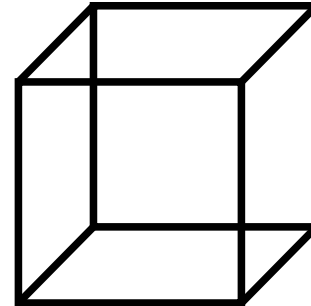
$$\begin{aligned} d &= 2 \\ \dim(P) &= 2 \\ \delta(G(P)) &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d &= 3 \\ \dim(P) &= 2 \\ \delta(G(P)) &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d &= 3 \\ \dim(P) &= 3 \\ \delta(G(P)) &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} d &= 3 \\ \dim(P) &= 3 \\ \delta(G(P)) &= 3 \end{aligned}$$

Abbildung 8: Beispiel für 0/1-Polytope

Theorem 4.8 (Naddef [22])

Sei $P = \text{conv}(V)$ ein 0/1-Polytop und $V \subseteq \{0, 1\}^d$. Dann erfüllt P die Hirsch' Vermutung. Weiter ist der Durchmesser von $G(P)$ beschränkt durch

$$\delta(G(P)) \leq \dim(P).$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn P affin isomorph zu einem d -dimensionalem Würfel ist.

Beweis: Seien u, v Knoten von P mit der Distanz $\delta(u, v) \geq d$. Wir nutzen die Symmetrie des d -dimensionalen Würfels

$$I_d := [0, 1]^d = \text{conv}(\{0, 1\}^d)$$

aus, um das gg. P auf den Fall $v = 0$ und $u \in \{0, 1\}^d$ zu reduzieren.

Mit Induktion nach der Dimension d können wir annehmen, daß P volle Dimension hat. Andernfalls sei $ax = z$ eine Gleichung, die von P erfüllt wird. Man erhält sofort, daß $z = 0$ wg. $0 \in P$ und damit auch $a \neq 0$. Nach Permutierung der Koordinaten können wir $a_d \neq 0$ annehmen.

Die Projektionsabbildung

$$\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1}, \left(\begin{array}{c} x \\ x_{d+1} \end{array} \right) \longmapsto x$$

entfernt die letzte Koordinate und bildet damit das 0/1-Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ auf ein affin isomorphes 0/1-Polytop $\pi(P) \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ ab. Folglich können wir für $P \subseteq \mathbb{R}^d$ $\dim(P) = d$ annehmen.

Nehmen wir nun $u_i = 0$ für ein i an. Dann sind 0 und u beides Knoten des Gesichts

$$F_{(i)} := P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0\}$$

von P , welches zu der Ungleichung $x_i \geq 0$ gehört. Durch Induktion nach d erhält man:

$$\delta(0, u) \leq \delta(G(F_{(i)})) \leq d - 1.$$

Folglich können wir nun $u = 1$ annehmen. Für jeden Nachbarn $w \in N(1)$ mit $k > 1$ Komponenten, die 0 sind, erhält man

$$\delta(0, 1) \leq \delta(0, w) + \delta(w, 1) \leq (d - k) + 1 < d,$$

wobei benutzt wurde, daß das Gesicht

$$F_w := P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0 \text{ falls } v_i = 0\}$$

einen Durchmesser von höchstens $d - k$ nach Induktion hat.

Falls also $\delta(0, 1) \geq d$ ist, so haben alle Nachbarn von 1 exakt eine Komponente, die 0 ist. Da 1 mind. d Nachbarn hat, erhalten wir $N(1) = \{1 - e_i \mid 1 \leq i \leq d\}$.

Betrachtet man erneut die Gesichter

$$F_{(i)} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_i = 0\}$$

von P , so erhält man, daß 0 und $1 - e_i$ Distanz $d - 1$ in $G(F_{(i)})$ haben. Durch Induktion nach d erhält man

$$F_{(i)} = \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^d \mid x_i = 0\}.$$

Betrachtet man nun alle Knoten, von denen wir wissen, daß diese in P enthalten sind, so erhält man $P = \text{conv}(\{0, 1\}^d) = I_d$ und $\delta(G(P)) = d$. \square

Die gleiche Aussage kann mit demselben Beweis übrigens auch für die monotone und die strikt monotone Variante der Hirsch' Vermutung gezeigt werden.

5 d -step Conjecture

Dieses Kapitel stellt die d -step conjecture vor und verdeutlicht die Beziehung zur gerade kennengelernten Hirsch' Vermutung.

5.1 Einführung in die d -step Conjecture

Im vorherigen Kapitel wurde die Hirsch' Vermutung sowie einige Varianten davon vorgestellt. Diese Vermutung konnte bis heute trotz intensiver Forschungsbemühungen weder bewiesen noch widerlegt werden. Wir werden uns in diesem und den noch folgenden Kapiteln mit einigen ausgesuchten Forschungsergebnissen rund um die Hirsch' Vermutung auseinandersetzen.

Was erwartet uns in diesem Kapitel konkret? Diese Frage läßt sich mit einer Gegenfrage beantworten: Was unternehmen Wissenschaftler, wenn eine offene Frage nicht beantwortet werden kann, ein konkretes Problem nicht gelöst werden kann? Ganz einfach: Man reduziert den allgemeinen Fall auf Spezialfälle und untersucht zunächst diese Spezialfälle, die im allgemeinen einfacher zu studieren sind.

Dieser Weg wurde auch bei der Hirsch' Vermutung bestritten: Ein berühmter Spezialfall ist die sogenannte d -step Conjecture, die einige interessante Eigenschaften hat. An dieser Stelle kann schon soviel verraten werden: Falls man zeigen könnte, daß die beschränkte Hirsch' Vermutung für den Fall $n = 2d$ korrekt ist, so folgt auch schon die Korrektheit für den allgemeinen beschränkten Fall. Dies ist aber nicht das einzige Resultat aus dem Studium der d -step Conjecture: Wir werden in den nächsten Kapiteln noch weitere interessante Ergebnisse kennenlernen.

Die ersten Mathematiker, die die sogenannte d -step Conjecture genauer untersucht haben, waren Klee und Walkup. In diesem und den nächsten Kapiteln werden wir uns auf einen Artikel [19] der beiden Wissenschaftler konzentrieren, der alle Resultate liefert, die hier vorgestellt werden sollen.

Zunächst wollen wir den Begriff der d -step Conjecture genauer definieren:

Definition 5.1 (d -step Conjecture)

Die d -step Conjecture ist ein Spezialfall der Hirsch' Vermutung für den Fall $n = 2d$. Die Vermutung sieht analog zur Hirsch' Vermutung wie folgt aus:

$$\Delta(d, 2d) \leq d \quad \text{bzw.} \quad \Delta_u(d, 2d) \leq d$$

5.2 Grundlagen

Wir haben im vorherigen Abschnitt ein sehr interessantes Resultat kennengelernt: Falls man zeigen könnte, daß die beschränkte Hirsch' Vermutung für den Fall $n = 2d$ (d -step Conjecture) korrekt ist, so folgt auch schon die Korrektheit für den allgemeinen beschränkten Fall. Um dieses zu beweisen, sind jedoch noch einige Grundlagen nötig, die in diesem Abschnitt vermittelt werden sollen:

Definition 5.2 (inzident)

Zwei Polyeder heißen *inzident*, falls ein Polyeder ein Gesicht des anderen Polyeders ist.

Definition 5.3 (Komplex)

Ein (abgeschlossener) *Komplex* ist eine endliche Menge \mathcal{C} von Polyedern in einem \mathbb{R}^d , so daß folgendes gilt:

- Der leere Polyeder ist in \mathcal{C} enthalten.
- Falls der Polyeder P in \mathcal{C} enthalten ist, so gilt dies auch für alle seine Gesichter.

- Der Schnitt $P \cap Q$ zweier Polyeder $P, Q \in \mathcal{C}$ ist entweder leer oder sowohl ein Gesicht von P als auch ein Gesicht von Q .

Folgende Begriffe im Zusammenhang mit Komplexen werden wir noch benötigen:

- Zwei Mengen von Polyedern $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, die nicht zwingend auch Komplexe sein müssen, heißen *äquivalent*, falls es eine bijektive Abbildung zwischen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 gibt, welche die Dimension und Inzidenz in beiden Richtungen erhält.
- Der Komplex eines Polyeders P wird mit $\mathcal{C}(P)$ bezeichnet und enthält alle Gesichter von P sowie P selbst.
- Zwei Polyeder P, Q heißen (*kombinatorisch*) *äquivalent*, geschrieben $P \simeq Q$, falls $\mathcal{C}(P)$ äquivalent zu $\mathcal{C}(Q)$ ist.

Definition 5.4 (Pfad von Gesichtern)

Seien x, y Knoten eines Polyeders P . Die Distanz von x nach y in P wird mit $\delta_P(x, y)$ bezeichnet. Ein *Pfad von Gesichtern* (engl.: facial path) (k_1, k_2, \dots, k_r) von x nach y in P ist eine Folge (K_1, K_2, \dots, K_r) von Gesichtern von P , so daß gilt:

$$\begin{aligned} x &\in K_1 \\ y &\in K_r \\ \dim K_i &= k_i, 1 \leq i \leq r \\ K_i \cap K_{i+1} &\neq \emptyset, 1 \leq i \leq r \end{aligned}$$

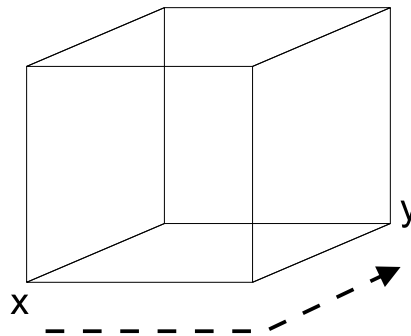


Abbildung 9: Ein (1,1)-Pfad auf einem Würfel.

Beispiel 5.5 (Pfad von Gesichtern)

Abbildung 9 zeigt einen (1,1)-Pfad auf einem Würfel. Die Gesichter auf dem eingezeichneten Pfad sind in diesem Fall die benutzten Kanten. Es lassen sich auch alternative Pfade von x nach y finden: Ein möglicher (2,2)-Pfad besteht z.B. aus der vorderen und der rechten Seitenfläche, ein möglicher (2)-Pfad wäre die untere Seitenfläche des Würfels.

Definition 5.6 (gepunktet)

Ein Polyeder heißt *gepunktet*, falls er mind. einen Knoten besitzt.

Definition 5.7 (Klasse (d,n))

Ein Polyeder gehört zur *Klasse* (d, n) , falls er ein gepunktetes d -Polyeder mit n Facetten ist und $1 \leq d < n$ gilt.

Definition 5.8 (Tripel (P, x, y))

Ein *Tripel* (P, x, y) besteht aus einem Polyeder P und zwei Knoten x, y von P . (P, x, y) heißt beschränkt, einfach und zugehörig zur Klasse (d, n) , falls P diese Eigenschaften erfüllt.

Folgerung 5.9 (Maximaler Durchmesser)

Der maximale Durchmesser $\Delta(d, n)$ bzw. $\Delta_u(d, n)$ ist das Maximum von $\delta_P(x, y)$ aller beschränkten bzw. unbeschränkten Tripel (P, x, y) der Klasse (d, n) .

Definition 5.10 (entfernbar)

Sei P ein Polyeder und F ein Gesicht von P . Definiere $\mathcal{C}_F(P) := \mathcal{C}(P) \setminus \mathcal{C}(F)$. $\mathcal{C}_F(P)$ ist kein Komplex, weil bestimmte Gesichter von P wie z.B. F nicht enthalten sind. Es kann aber sein, daß $\mathcal{C}_F(P)$ äquivalent zum Komplex eines Polyeders Q ist: In diesem Fall sagen wir, daß das Gesicht F aus dem Polyeder P *entfernbar* ist und Q kann aus P durch Entfernen von F erhalten werden.

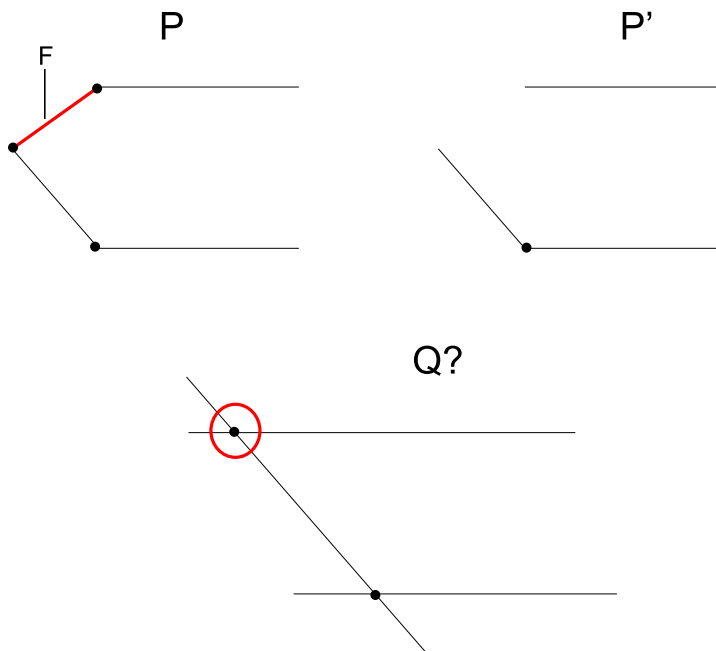


Abbildung 10: Beispiel für nicht entferbares Gesicht

Beispiel 5.11 (entfernbar)

Abbildung 10 zeigt ein nicht entferbares Gesicht eines Polyeders P . Wird die rote Kante F mitsamt anliegenden Knoten aus P entfernt, so erhält man ein Gebilde P' , welches der Veranschaulichung halber als Polyeder gezeichnet wurde. Die Aufgabe ist nun, einen Polyeder Q zu finden, dessen Komplex äquivalent zu $\mathcal{C}_F(P)$ ist, was zunächst nicht besonders schwierig erscheint: Die Abbildung zeigt ein solches Polyeder Q , welches man intuitiv wählen würde.

Hier ist jedoch (mittels des roten Kreises) vermerkt, daß dies nicht korrekt ist: Q hat einen weiteren Knoten, der nicht in $\mathcal{C}_F(P)$ auftaucht. Tatsache ist, daß alle Versuche, ein geeignetes Q zu konstruieren, scheitern müssen, denn in P' findet sich nur ein Knoten, zu dem zwei Kanten inzident sind, die aber gleichzeitig zur jeweils anderen Seite unbeschränkt sind. Weiter gibt es eine dritte Kante, die in beide Richtungen unbeschränkt ist. Aufgrund dieser Gegebenheiten wird bei jedem Versuch, ein geeignetes Q zu konstruieren, mind. eine Kante in einer Richtung noch beschränkt werden.

Aufbauend auf den soeben eingeführten Definitionen werden wir nun einige Hilfssätze kennenlernen, die bei der späteren Beweisführung noch benötigt werden. Diese werden entweder bewiesen

oder - in den meisten Fällen - anhand von Bildern verdeutlicht werden:

Proposition 5.12

Sei P ein Polyeder und H, H' zwei parallele, begrenzende Hyperebenen von P . Dann ist das Gesicht $H \cap P$ entferbar.

Beweis: Der Beweis konstruiert eine projektive Transformation von P in ein Polyeder Q , so daß $\mathcal{C}(Q)$ äquivalent zu $\mathcal{C}_{H \cap P}(P)$ ist. Sei E der Vektorraum, welcher P, H und H' enthält. Konstruiere $E \times \mathbb{R}$, d.h. das Produkt von E mit den reellen Zahlen. Setze weiter $J := H \times \mathbb{R}$ und $J' := H' \times \mathbb{R}$, so daß $E \times \{0\}, J$ und J' Hyperebenen im $E \times \mathbb{R}$ sind.

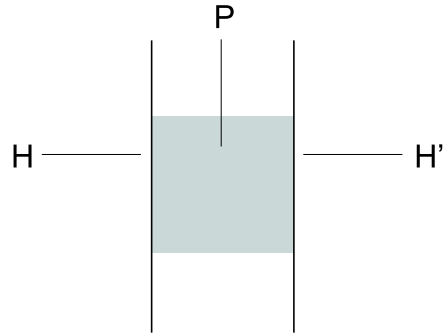


Abbildung 11: Polyeder P mit begrenzenden Hyperebenen H und H'

Wähle nun einen Punkt $u \in J \setminus (H \times \{0\})$. Weiter sei jedem Punkt $p \in P \setminus H$ ein Punkt τp zugeordnet, welcher sich als Schnittpunkt von J' mit dem Strahl ergibt, der von u ausgeht und durch $p \times 0$ läuft.

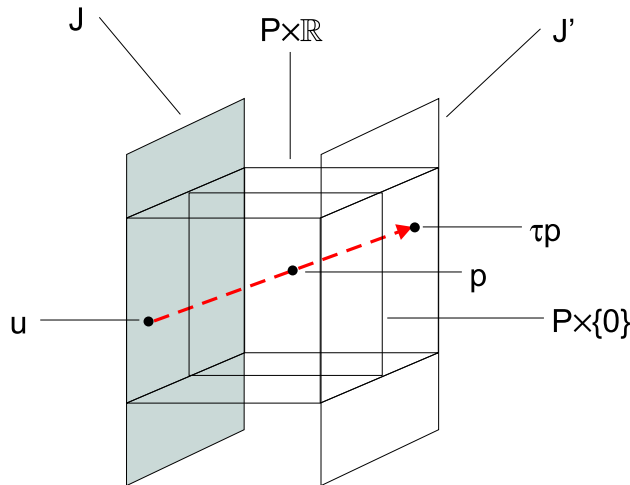


Abbildung 12: Projektion eines Punktes p auf τp

Es läßt sich leicht einsehen, daß τ eine projektive Transformation ist. Damit folgt, daß $Q := \tau(P \setminus H)$ ein Polyeder in J' ist und die Gesichter von Q sind Mengen der Form $\tau(G \setminus H)$, wobei G ein Gesicht von P ist, das nicht in H enthalten ist.

Daher sind $\mathcal{C}(Q)$ und $\mathcal{C}_{H \cap P}(P)$ äquivalent und folglich $H \cap P$ als Gesicht von P entferbar. \square

Mit der vorherigen Proposition kann man folgende Aussage leicht folgern:

Korollar 5.13

Jedes echte Gesicht eines Polytops ist entfernbar.

Beweis: Sei P ein Polytop und F ein echtes Gesicht von P . Weiter sei H eine begrenzende Hyperebene von P , so daß $H \cap P = F$. Wähle eine zu H parallele Hyperebene H' und verschiebe diese so, daß sie P gerade noch berührt. Proposition 5.12 liefert nun, daß $H \cap P$ entfernbar ist. \square

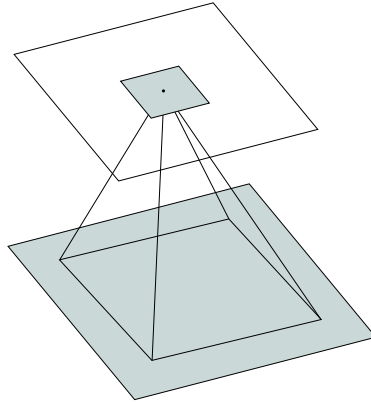


Abbildung 13: Pyramide mit begrenzender Hyperebene und dazu paralleler Hyperebene

Wir werden nun zwei weitere Begriffe einführen, von deren Eigenschaften wir später ohne weitere Erläuterungen Gebrauch machen werden.

Proposition 5.14 (Produkt)

Sei P_1 ein d_1 -Polyeder und P_2 ein d_2 -Polyeder. Das *Produkt* $P_1 \times P_2$ ist ein $(d_1 + d_2)$ -Polyeder, dessen k -Gesichter Mengen der Form $K_1 \times K_2$ sind, so daß K_i ein k_i -Gesicht von P_i ist und $k = k_1 + k_2$.

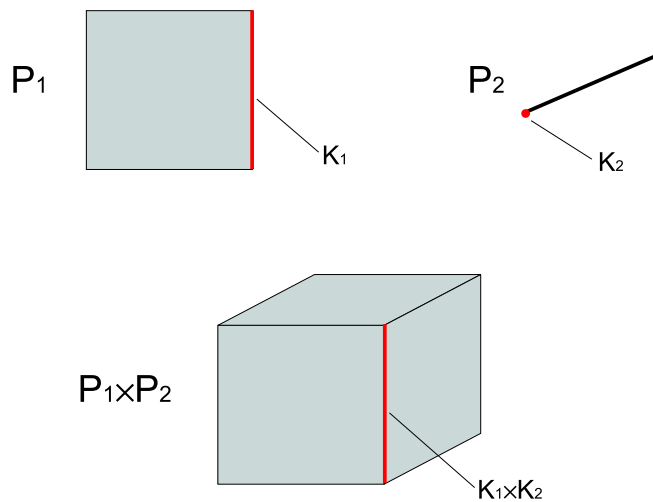


Abbildung 14: Zwei Polyeder P_1 und P_2 sowie deren Produkt $P_1 \times P_2$

Knoten, Kanten und Facetten von $P_1 \times P_2$ ergeben sich wie folgt: Knoten ergeben sich als Produkt von Knoten der Faktoren. Kanten ergeben sich als Produkt eines Knotens eines Faktors mit einer Kante eines Faktors. Facetten ergeben sich als Produkt eines Faktors mit einer Facette eines Faktors. Folglich ist die Anzahl der Facetten des Produkts gleich der Summe der Facettenanzahlen der Faktoren.

Der Durchmesser des Produkts ist die Summe der Durchmesser der Faktoren. Falls beide Faktoren beschränkt oder einfach sind, so überträgt sich die entsprechende Eigenschaft auch auf das Produkt.

Proposition 5.15 (Keil)

Sei K ein k -Gesicht eines d -Polyeders P , $0 \leq k < d$. Sei C das Produkt von P mit der Halb-Linie $L = [0, \infty)$ und sei jeder Punkt p in P identifiziert mit $p \times 0$ in C . Sei H eine Hyperebene in dem Vektorraum, der durch C aufgespannt wird, so daß $H \cap P = K$ und H das Innere von C schneidet.

Dann wird C durch H in zwei $(d+1)$ -Polyeder geteilt, von denen eines P enthält. Diesen Polyeder wollen wir mit W bezeichnen. W ist kombinatorisch vollständig durch P und die Wahl von K bestimmt und wir nennen W den *Keil* (engl.: wedge) über P mit Fuß K . W ist ein $(d+1)$ -Polyeder und hat eine Facette mehr als P .

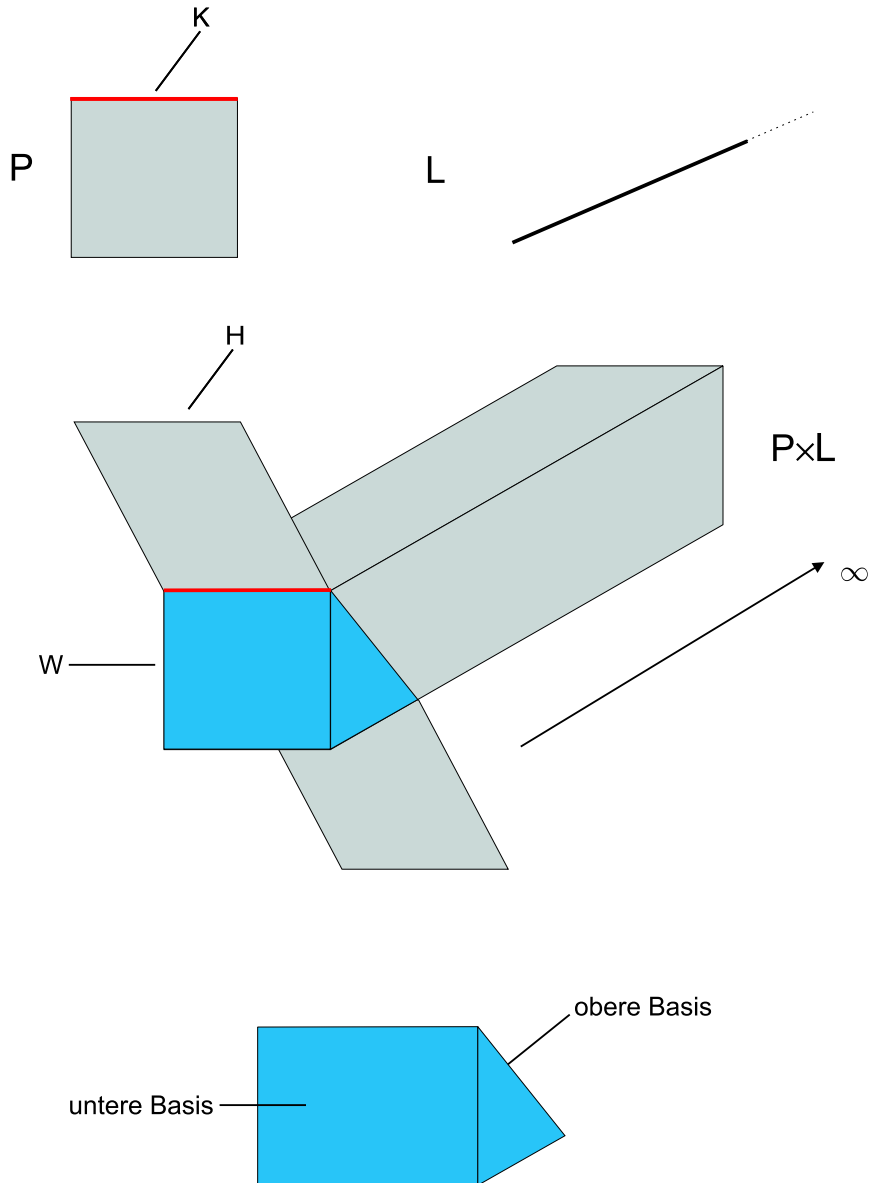


Abbildung 15: Konstruktion eines Keils für Quadrat P mit Kante K

Die Facetten P und $H \cap C$ von W , welche wir als *untere und obere Basis* von W bezeichnen wollen,

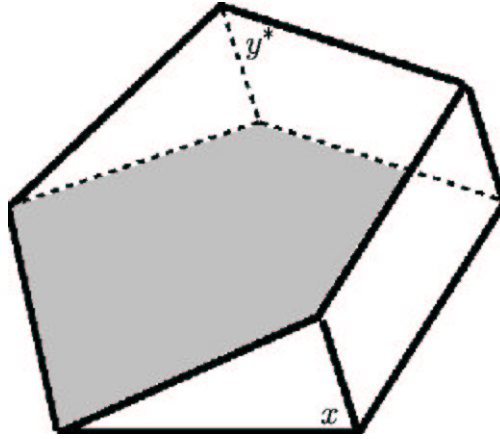


Abbildung 16: Keil über einem 5-Eck

sind äquivalent. Falls x ein Knoten von $P \setminus K$ ist, so bezeichnet x^* den Punkt der oberen Basis über x , welcher sich als Schnitt von der oberen Basis mit dem Produkt von x und L ergibt.

Ein s -Gesicht von W kann folgendermaßen aussehen:

- s -Gesicht einer der Basen
- Keil über einem $(s - 1)$ -Gesicht T von P mit Fuß $T \cap K$
- Gesicht V von W , welches beide Basen aber nicht K schneidet

Falls P beschränkt ist, so ist auch W beschränkt. Falls P einfach ist und K eine Facette von P ist, so ist auch W einfach.

Zum Schluß fassen wir einige Eigenschaften von einfachen Polyedern zusammen, welche bei der Beweisführung benutzt werden. Diese Eigenschaften werden nicht bewiesen werden:

Proposition 5.16 (Eigenschaften einfacher Polyeder)

Sei P ein einfacher, gepunkteter d -Polyeder, $d \geq 1$. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Für jede beliebige Nachbarschaft N eines Knotens von P existiert ein abgeschlossener Halb-raum J , so daß $P \cap J$ ein d -Simplex ist, welcher in N enthalten ist. Falls r und s ganze Zahlen sind, für die $0 \leq r \leq s \leq d$ gilt, so ist jedes r -Gesicht von P inzident zu $\binom{d-r}{d-s}$ s -Gesichtern von P .
2. Jedes k -Gesicht K von P ist ein einfacher k -Polyeder. Falls $k < d$, so ist K der Schnitt von $d - k$ Facetten von P , und umgekehrt ist der Schnitt von $d - k$ Facetten von P leer oder ein k -Gesicht von P .
3. Seien x_0, \dots, x_l aufeinander folgende Knoten in einem Pfad der Länge l auf P . Für jedes i , $0 \leq i < l$, wird auf dem Weg von x_i nach x_{i+1} genau eine Facette von P verlassen und genau eine weitere Facette von P besucht. Falls alle Knoten x_0, \dots, x_l inzident zu n verschiedenen Facetten von P sind, dann gilt $l \geq n - d$. Falls $l < d$ erfüllt ist, so liegt der Pfad vollständig in einem Gesicht von P mit Dimension höchstens l .

Beispiel 5.17 (Eigenschaften einfacher Polyeder)

Die vorangegangene Proposition 5.16 wurde nicht bewiesen. Statt dessen werden wir uns nun einige Beispiele anschauen:

Abbildung 17 zeigt einen Würfel und eine Hyperebene, die diesen unterhalb des Knotens v schneidet. Sei die Nachbarschaft N von v der Teil des Würfels, welcher sich vor der Hyperebene befindet und den Knoten v einschließt. Dann läßt sich leicht ein Halbraum J finden, so daß $P \cap J$ ein 3-Simplex ist, welcher in N enthalten ist. Dazu wählt man als Halbraum einfach den Teil des zugrunde liegenden Vektorraums, welcher sich vor der Hyperebene befindet.

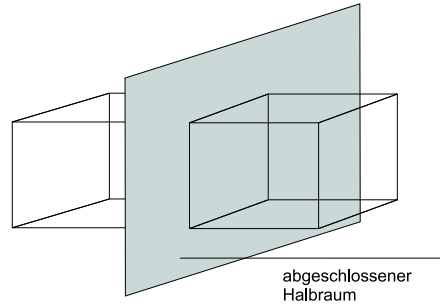


Abbildung 17: Beispiel für Aussage 1 von Proposition 5.16

Der letzte Teil der ersten Aussage sowie die komplette Aussage 2 lassen sich anhand von Abbildung 18 nachvollziehen: Jedes 1-Gesicht des Würfels ist inzident zu $\binom{3-1}{3-2} = 2$ 2-Gesichtern (Fall: $r = 1$, $s = 2$). Gleiche Beobachtungen lassen sich für andere r , s mit $0 \leq r \leq s \leq d$ machen. Jedes k -Gesicht des Würfels für $k \leq 3$ ist ein einfacher k -Polyeder. Der letzte Teil der zweiten Aussage läßt sich analog nachvollziehen; dies sei dem Leser überlassen.

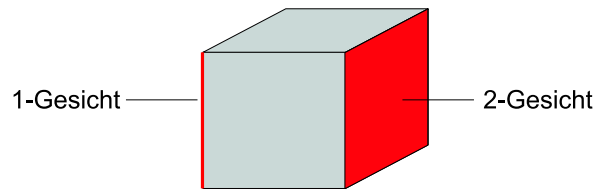


Abbildung 18: Beispiel für Aussage 1 und 2 von Proposition 5.16

Abbildung 19 zeigt einen Pfad der Länge 2 auf einem Würfel. Es läßt sich leicht einsehen, daß allgemein für jeden Pfad auf einem Würfel beim Weg von einem Knoten zum nächsten stets eine Facette verlassen und eine neue besucht wird. Die Knoten auf dem Pfad in der Abbildung sind inzident zu 5 verschiedenen Facetten. Es muß folglich $2 \geq 5 - 3 = 2$ gelten, was natürlich der Fall ist. Da für den Pfad in der Abbildung sogar $2 < 3$ gilt, muß der Pfad vollständig in einem Gesicht der Dimension höchstens 2 enthalten sein: Hier wählt man einfach die untere Fläche des Würfels.

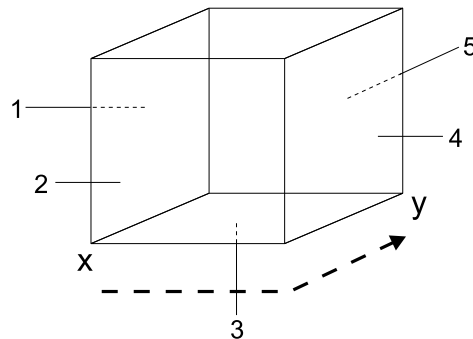


Abbildung 19: Beispiel für Aussage 3 von Proposition 5.16

Beispiel 5.18 (Gegenbeispiele zu Proposition 5.16)

Mit diesem Beispiel soll demonstriert werden, wie wichtig die Eigenschaft *einfach* für die Beweisführung ist. Dazu schauen wir uns einige nicht-einfache Gegenbeispiele zu Proposition 5.16 an:

Abbildung 20 zeigt einen Diamanten mit einem Achteck als Grundfläche. Dieser ist nicht einfach: Knoten x hat Grad 8, während alle anderen Knoten Grad 3 haben. Nehmen wir nun an, daß die Nachbarschaft N von x den gesamten Diamanten oberhalb der Hyperebene umfaßt, die diesen schneidet. Sei weiter der Halbraum J gegeben als der Teil des zugrunde liegenden Vektorraums, welcher sich oberhalb der Hyperebene befindet. Dann ist $P \cap J$ vollständig in N enthalten. Man erhält aber keinen einfachen Polyeder, denn das entstehende Gebilde ist wieder ein Diamant mit einem Achteck als Grundfläche. Alternativ hätte man hier als Hyperebene auch diejenige wählen können, die das Achteck als Facette des Diamanten festlegt.

Setzt man $r = 0$ und $s = 1$, so müßte beispielweise der Knoten x zu $\binom{3-0}{3-1} = 3$ Kanten inzident sein, doch x hat Grad 8.

Wählt man als Gesicht eines nicht-einfachen Polyeders den Polyeder selbst, so ist dieses Gesicht natürlich auch nicht einfach.

Der Knoten x ist ein 0-Gesicht des Diamanten und müßte sich laut der Proposition als Schnitt von 3 Facetten ergeben. Das läßt sich mit einer geeigneten Auswahl von Facetten sicherlich bewerkstelligen. Streng genommen aber ergibt sich x als Schnitt von 8 Facetten, nämlich den dreieckigen Seitenflächen.

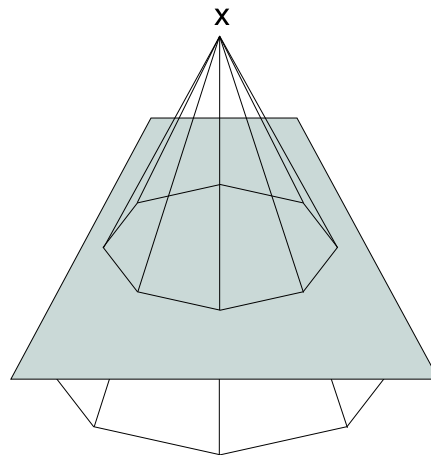


Abbildung 20: Nicht-einfaches Gegenbeispiel zur Aussage 1 von Proposition 5.16

Ein einfaches Gegenbeispiel zum letzten Teil von Aussage 2 veranschaulicht Abbildung 21: Der Einfachheit halber wurden nur die Facetten dargestellt, die für das Gegenbeispiel interessant sind. Der Schnitt der zwei roten Facetten ist weder leer noch ein 1-Gesicht des Diamanten.

Abbildung 22 liefert genügend Gegenbeispiele für die gesamte Aussage 3: Der Pfad von x nach y verläßt 6 Facetten (6 dreieckige Seitenflächen) und besucht nur eine neue Facette (Grundfläche des Diamanten).

x und y sind insgesamt zu 9 Facetten inzident. Folglich müßte $1 \geq 9 - 3 = 6$ gelten, was natürlich nicht der Fall ist.

Um ein Gegenbeispiel zum letzten Teil der Aussage 3 zu konstruieren, müßte man mind. ein 4-dimensionales Polytop betrachten, was zeichentechnisch etwas ungünstig ist.

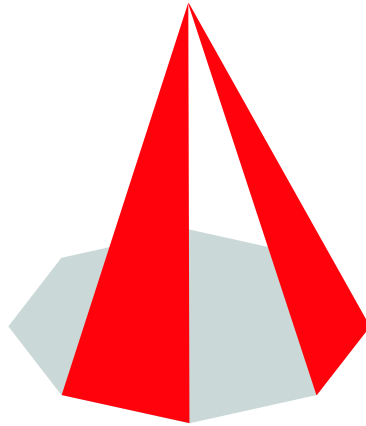


Abbildung 21: Nicht-einfaches Gegenbeispiel zur Aussage 2 von Proposition 5.16

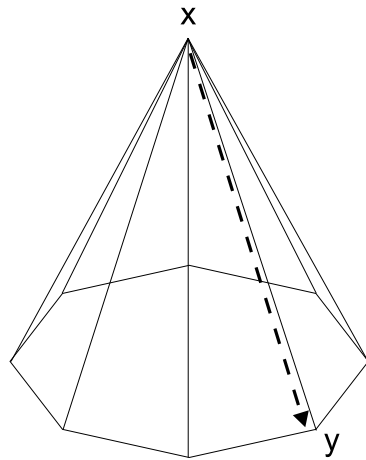


Abbildung 22: Nicht-einfaches Gegenbeispiel zur Aussage 3 von Proposition 5.16

5.3 Vorbereitung der Beweise

Nun wollen wir uns Schritt für Schritt an den Beweis des Resultats heranwagen. Die notwendigen Grundlagen wurden im vorherigen Abschnitt vermittelt.

Wir beginnen mit drei Reduktionen, die uns dabei helfen, die komplexe Beweissituation auf einige besser überschaubare Situationen zu reduzieren. Die Reduktionen werden wir später beweisen.

Reduktion 5.19

Bei der Bestimmung von $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$ ist es ausreichend, einfache Polyeder und einfache Polytope zu betrachten.

Reduktion 5.20

Bei der Bestimmung von $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$ mit $n \geq 2d$ ist es ausreichend, $\delta_P(x, y)$ für Knoten x und y zu betrachten, die nicht in einer gemeinsamen Facette von P liegen.

Reduktion 5.21

Bei der Bestimmung von $\Delta_u(d, n)$ mit $d \geq 2$ ist es ausreichend, nur solche Knoten x und y zu betrachten, die inzident zu unbeschränkten Kanten von P sind.

Die erste Reduktion wird im Papier von Klee und Walkup [19] nicht direkt bewiesen, sondern es wird auf verschiedene Resultate dieser und anderer Autoren verwiesen. Wir wollen uns aus Zeitgründen an dieser Stelle nicht mit konkreten Formalismen auseinandersetzen, die die Überführung eines nicht-einfachen Gebildes in ein einfaches Gebilde beschreiben.

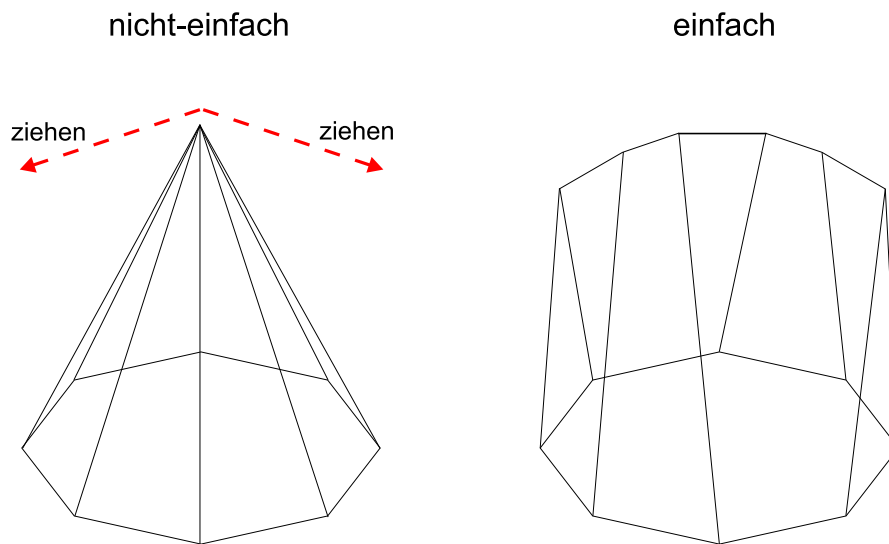


Abbildung 23: Überführung eines nicht-einfachen Polytops in ein einfaches Polytop

Stattdessen schauen wir uns beispielhaft eine mögliche Technik an: Abbildung 23 zeigt links einen Dimanten mit einem Achteck als Grundfläche. Dieser ist nicht einfach, denn der oberste Knoten hat Grad 8, während alle anderen Knoten Grad 3 haben. Zieht man nun jedoch die Spitze geeignet auseinander¹, so erhält man ein einfaches Polytop (alle Knoten Grad 3), wobei die Anzahl der Facetten gleich bleibt. Weiter läßt sich beobachten, daß die Pfade auf dem einfachen Polytop mind. so lang sind wie die entsprechenden auf dem nicht-einfachen Polytop.

Nun wollen wir ein allgemeines Resultat aus [19] bzgl. der Überführung nicht-einfacher Gebilde in einfache Gebilde vorstellen, welches im Anschluß wiederverwendet werden wird:

¹Man stelle sich eine Gardinenstange vor, bei der die Ringe, die die Gardine halten, entweder gleichmäßig über die Gardinenstange verteilt oder alle an einem Ort konzentriert sind.

Lemma 5.22 (nicht einfach \Rightarrow einfach)

Zu jedem nicht-einfachen Polyeder P der Klasse (d, n) existiert ein einfacher Polyeder Q derselben Klasse, so daß folgende Aussagen gelten:

1. Falls P beschränkt bzw. unbeschränkt ist, so ist dies auch Q .
2. Es gibt eine Abbildung θ von $\mathcal{C}(Q)$ nach $\mathcal{C}(P)$, so daß für Gesichter F, G von $\mathcal{C}(Q)$ gilt:
 - (a) $F \supseteq G \Rightarrow \theta(F) \supseteq \theta(G)$
 - (b) $\dim \theta(F) \leq \dim F$

Weiter ist jedes Gesicht von $\mathcal{C}(P)$ das Bild unter der Funktion θ eines Gesichts von $\mathcal{C}(Q)$ derselben Dimension.

An dieser Stelle wird bereits deutlich, was sich für ein Potential hinter der ersten Reduktion uns insb. den Aussagen des vorherigen Lemmas verbirgt: Wir wissen nun, daß wir unsere Studien auf einfache Polyeder bzw. Polytope konzentrieren können, was eine enorme Erleichterung bietet, weil wir viele schöne Eigenschaften ausnutzen können, die uns vor allem das Lemma aber auch schon die Definition des Begriffes *einfach* selbst liefert.

Wir wollen nun ein weiteres Lemma beweisen, welches die gerade gewonnenen Resultate auf Pfade auf Polyedern überträgt:

Lemma 5.23 (Pfade in nicht-einfachen und einfachen Tripeln)

Seien d, n, r und k_1, \dots, k_r positive ganze Zahlen mit $k_i \leq d \forall i \in \{1, \dots, r\}$. Falls es in jedem einfachen beschränkten Tripel (P, x, y) einen (k_1, \dots, k_r) -Pfad von x nach y der Klasse (d, n) gibt, so existiert ein solcher Pfad in jedem beschränkten Tripel (also nicht zwingend *einfach*) dieser Klasse. Die Aussage gilt analog für unbeschränkte Tripel.

Beweis: Nehmen wir an, daß der erste Teil der Aussage („Falls ...“) für eine bestimmte Menge von Werten wahr ist und sei (P, x, y) ein beschränktes Tripel der Klasse (d, n) . Nach Lemma 5.22 existiert ein einfaches d -Polytop Q und eine Abbildung θ von $\mathcal{C}(Q)$ nach $\mathcal{C}(P)$ wie in Lemma 5.22, welche Knoten x' und y' auf x und y abbildet.

Aufgrund unserer Annahme folgt nun, daß es einen (k_1, \dots, k_r) -Pfad - sagen wir (K'_1, \dots, K'_r) - von x' nach y' in Q gibt. Mit Aussage 2a aus Lemma 5.22 folgt, daß sich $\theta(F)$ und $\theta(G)$ in P schneiden, wenn sich die Gesichter F und G in Q schneiden. Folglich ist $(\theta(K'_1), \dots, \theta(K'_r))$ ein Pfad von x nach y in P . Aussage 2b desselben Lemmas impliziert, daß dies ein (k_1^*, \dots, k_r^*) -Pfad ist mit $k_i^* \leq k_i$.

Nun kann man aber jedes Gesicht $\theta(K'_i)$ auf dem Pfad durch ein Gesicht K_i von P ersetzen, welches es enthält, so daß (K_1, \dots, K_r) ein (k_1, \dots, k_r) -Pfad von x nach y in P ist.

Damit ist der Beweis für beschränkte Polytope erbracht. Die restlichen Fälle lassen sich analog beweisen. \square

In dem nun folgenden Theorem wollen wir zeigen, daß die Reduktionen nicht nur einzeln korrekt sind, sondern auch gleichzeitig angewendet werden können.

Theorem 5.24 (Anwendbarkeit der Reduktionen)

Der Wert $\Delta(d, n)$, $1 \leq d < n$, wird als Distanz zwischen Knoten x und y in einem *einfachen* d -Polytop P mit n Facetten angenommen. Der Wert $\Delta_u(d, n)$, $2 \leq d < n$ wird als Distanz zwischen Knoten x und y in einem *einfachen* d -Polyeder P mit n Facetten angenommen, so daß x und y beide inzident zu unbeschränkten Kanten von P sind. Falls $n \geq 2d$ erfüllt ist, darf man annehmen, daß x und y nicht in einer gemeinsamen Facette von P liegen.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $d \geq 3$. Der Fall $d \leq 2$ ist trivial und wurde implizit bereits in Beispiel 4.2 behandelt. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis starten, werfen wir einen Blick auf

die Reduktionen und die beiden Lemmata: Reduktion 5.19, Lemma 5.22 und Lemma 5.23 liefern bereits die Korrektheit des ersten Satzes und des Beginns des zweiten Satzes, nämlich Aussagen über die Beziehung von $\Delta(d, n)$ bzw. $\Delta_u(d, n)$ zu der Distanz zwischen Knoten x und y in einem einfachen Polytop bzw. Polyeder.

Wir beginnen nun mit dem Beweis des letzten Satzes und nehmen an, daß $n \geq 2d$ erfüllt ist. Wähle unter der Menge aller Tripel (P, x, y) mit $\delta_P(x, y) = \Delta_u(d, n)$ eines aus, welches die Dimension des kleinsten Gesichts G von P maximiert, das inzident zu sowohl x als auch y ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und versuchen $\dim(G) = d$ zu zeigen. Nehmen wir dazu an, daß G in einer Facette F von P enthalten ist. Daraus läßt sich folgern, daß

$$\delta_F(x, y) \geq \delta_P(x, y) = \Delta_u(d, n)$$

gilt und F ein einfacher $(d - 1)$ -Polyeder mit höchstens $n - 1$ eigenen Facetten ist.

Zur Begründung der Ungleichung: $\delta_F(x, y)$ bezeichnet die Länge eines kürzesten Pfades von x nach y , der innerhalb der Facette F bleibt, wohingegen $\delta_P(x, y)$ diese Einschränkung nicht erhebt. Folglich ist $\delta_F(x, y)$ mind. so groß wie $\delta_P(x, y)$. Ein Beispiel, wo $\delta_F(x, y)$ echt größer als $\delta_P(x, y)$ ist, liefert Abbildung 24.

Zum Verständnis der restlichen Folgerungen mache man sich klar, daß P ein einfacher Polyeder der Klasse (d, n) ist. F ist somit als Facette ebenfalls einfach und hat Dimension $d - 1$. Jede Facette von F ist gleichzeitig ein $d - 2$ -Gesicht von P und inzident zu einer weiteren Facette von P . Nun hat P insg. n Facetten, von denen eine F selbst ist. Folglich kann F höchstens $n - 1$ Facetten besitzen.

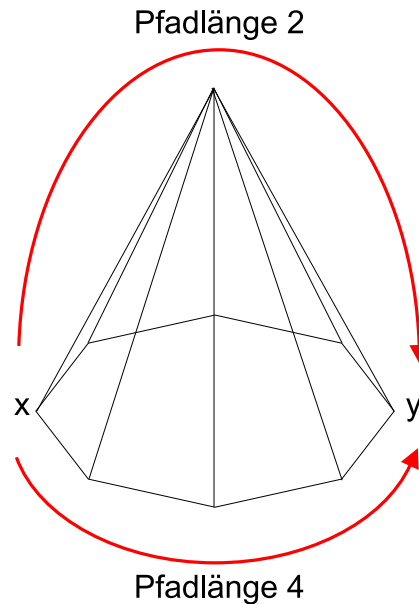


Abbildung 24: Beispiel für $\delta_F(x, y) > \delta_P(x, y)$

Aus F kann nun weiter ein Polyeder F' konstruiert werden, welcher exakt $n - 1$ Facetten besitzt. Dies läßt sich durch das Abbrechen einer bestimmten Menge von Knoten, die nicht x oder y enthält, realisieren.

Hierzu eine Anmerkung: Falls keine anderen Knoten existierten, würde $G = [x, y]$ folgen, was für $d \geq 3$ nicht korrekt ist. Weiter erhöht jedes Abbrechen eines Knotens die Anzahl der Knoten um

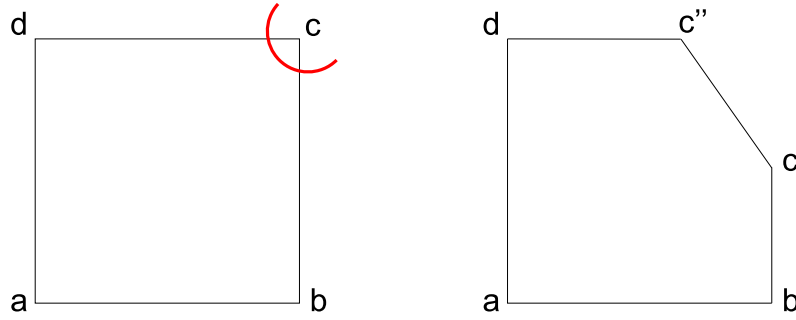


Abbildung 25: Abbrechen eines Knotens von einem Quadrat

$d - 1$ und die Anzahl der Facetten um 1.

Folgende Aussagen lassen sich leicht durch Überlegen verifizieren:

- F' ist einfach.
- $\delta_{F'}(x, y) \geq \delta_F(x, y)$
- $G' = G \cap F'$ ist das kleinste Gesicht von F' , welches x und y enthält.
- $\dim(G') = \dim(G)$

Da F' einfach ist und $n - 1 > 2d - 2$ gilt, muß es mind. eine Facette K von F' geben, welche nicht inzident zu x oder y ist. Diese Erkenntnis läßt sich durch Zählen der Facetten, die inzident zu x und y sind, nachvollziehen: Zu x und y sind je $d - 1$ Facetten inzident und aus $n \geq 2d$ folgt $n - 1 > 2d - 2$. Eine Anwendung des Schubfachprinzips liefert die Existenz einer solchen Facette K .

Sei nun W der Keil über F' mit Fuß K und sei y^* der Knoten über y in der oberen Basis von W (siehe dazu auch Proposition 5.15). Dann ist W ein einfacher d -Polyeder mit exakt n Facetten und es gilt weiter:

$$\delta_W(x, y^*) \geq \delta_{F'}(x, y) \geq \Delta_u(d, n).$$

Hier gilt aufgrund der Definition von $\Delta_u(d, n)$ aktuell Gleichheit. Wie sieht nun das kleinste Gesicht S von W aus, welches sowohl x als auch y^* enthält? Da S kein Gesicht einer der beiden Basen von W ist, folgt mit der Charakterisierung der Gesichter in Proposition 5.15, daß $S \cap F'$ die Knoten x und y enthält und damit auch G' . Da G' nicht ganz S umfaßt gilt: $\dim(S) > \dim(G)$.

Damit erhalten wir aber einen Widerspruch, weil das Tripel (W, x, y^*) der Wahl von (P, x, y) widerspricht, denn wir hatten angenommen, daß die Dimension von G durch die Wahl von (P, x, y) maximiert wird. Damit folgt $\dim(G) = d$ und G kann folglich nicht in einer Facette von P enthalten sein. Der Beweis kann analog auch für beschränkte Polyeder (Polytope) geführt werden.

Nun müssen wir noch den zweiten Teil des zweiten Satzes beweisen: Sei (P, x, y) ein Tripel, welches alle Anforderungen des Theorem bzgl. $\Delta_u(d, n)$ erfüllt außer der möglichen Existenz von unbeschränkten Kanten, die inzident zu x und y sind. Falls P beschränkt ist, entfernen wir einfach einen Knoten ohne die anderen Eigenschaften von P zu verletzen.

Sei nun L die Gerade durch x und y , c der Mittelpunkt des Liniensegments $[x, y]$ und C die Vereinigung aller Strahlen in P , welche von c ausgehen. C ist folglich ein polyhedraler Kegel. Diesen Begriff haben wir nicht extra eingeführt, weil dieser nur hier kurz benötigt wird. Wir gehen davon aus, daß der Begriff intuitiv einsichtig ist. Es ergibt sich: $C \cap L = \{c\}$.

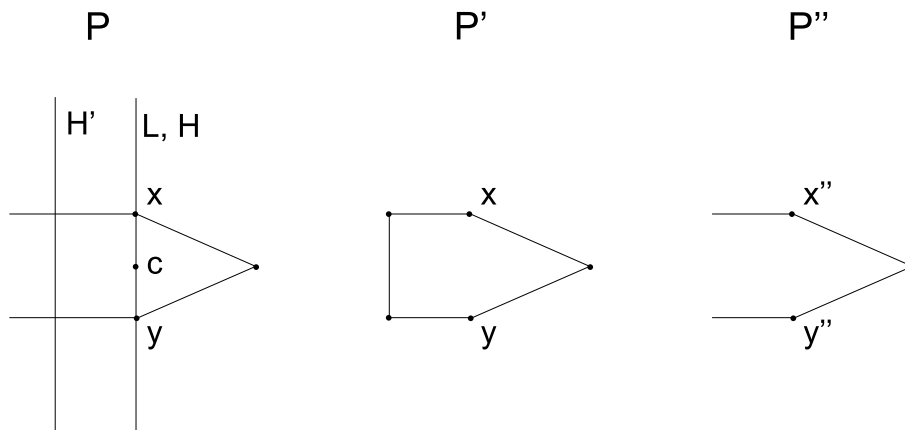


Abbildung 26: Konstruktion eines Polyeders P'' aus einem Polyeder P

Sei nun H eine Hyperebene, die C bei c festlegt und L enthält, und H' die Translation von H , die das Innere von C schneidet. P wird durch H' in zwei Polyeder unterteilt, von denen eines - wir bezeichnen es fortan mit P' - x und y enthält und beschränkt ist. Falls H' genügend nah bei H liegt, ist P' ein einfaches d -Polytop mit höchstens $n + 1$ Facetten, so daß mind. eine Kante, die inzident zu x ist, die Facette $P \cap H'$ schneidet und mind. eine weitere Kante, die inzident zu y ist, $P \cap H'$ schneidet.

Sei nun (P'', x'', y'') das Tripel, welches man aus (P', x, y) durch Entfernen von $P \cap H'$ und Abbrechen von Knoten erhält, bis die Anzahl der Facetten n beträgt. Nun kann man sich überlegen, daß (P'', x'', y'') alle Anforderungen des Theorems bzgl. $\Delta_u(d, n)$ erfüllt. \square

Wir wollen den Abschnitt an dieser Stelle beenden. Was haben wir bisher erreicht? Wir haben im vorherigen Abschnitt die notwendigen mathematischen Grundlagen des Beweises unseres Resultats kennengelernt. In diesem Abschnitt haben wir im wesentlichen die Korrektheit und Anwendbarkeit von drei Reduktionen gezeigt, die uns die Beweisarbeit sehr erleichtern werden. Im nächsten Abschnitt werden wir den Beweis des Resultats abschließen.

5.4 Beweis des Resultats

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis fortfahren, benötigen wir noch einige induktive Ungleichungen für die Funktionen $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$. Vorher führen wir zwei einfache Begriffe ein:

Definition 5.25 (v -Kante, v -Facette)

Sei P ein Polyeder bzw. Polytop und v ein Knoten von P . Dann bezeichnet man eine Kante bzw. Facette von P , die inzident zu v ist, als v -Kante bzw. v -Facette von P .

Proposition 5.26 (Induktive Ungleichungen 1)

Für $1 < d < n$ gilt:

1. $\Delta_u(d, n + 1) > \Delta_u(d, n)$
2. $\Delta(d, n + 1) \geq \Delta(d, n)$
3. $\Delta_u(d + 1, n + 2) > \Delta_u(d, n)$
4. $\Delta(d + 1, n + 2) > \Delta(d, n)$

Beweis: Aussage 2 kann mit Hilfe des Abbrechens von Knoten verifiziert werden. Diese Technik wurde im Beweis zu Theorem 5.24 eingesetzt.

Die letzten beiden Aussagen folgen aus Proposition 5.14: Falls P ein d -Polyeder mit Durchmesser $\Delta_u(d, n)$ mit n Facetten ist, dann ist $P \times [0, 1]$ ein $(d + 1)$ -Polyeder mit Durchmesser $\Delta_u(d, n) + 1$ mit $n + 2$ Facetten (siehe auch Proposition 5.14).

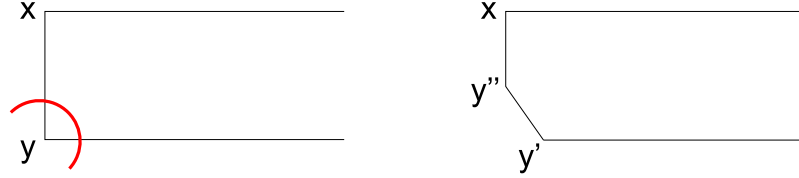


Abbildung 27: Konstruktion eines Polyeders mit höherem maximalem Durchmesser

Für den Beweis der ersten Aussage betrachtet man das Tripel (P, x, y) mit Durchmesser $\Delta_u(d, n)$ wie in Reduktion 5.21, d.h. x und y sind inzident zu unbeschränkten Kanten von P . Sei g eine solche unbeschränkte y -Kante von P . Konstruiere aus P einen neuen Polyeder P' durch Abbrechen von y und bezeichne den neuen Endpunkt von g mit y' . Dann ist P' ein d -Polyeder mit $n + 1$ Facetten und $\delta_{P'}(x, y') = \Delta_u(d, n) + 1$. \square

Proposition 5.27 (Induktive Ungleichungen 2)

Für $1 < d < n$ gilt:

1. $\Delta_u(d + 1, n + 1) \geq \Delta_u(d, n)$
2. $\Delta(d + 1, n + 1) \geq \Delta(d, n)$

In beiden Fällen gilt Gleichheit, falls $n \leq 2d$ erfüllt ist.

Beweis: Wir führen nur den Beweis der zweiten Aussage; die erste Aussage kann analog bewiesen werden. Sei P ein d -Polytop mit Durchmesser $\Delta(d, n)$ mit n Facetten, K eine Facette von P und W der Keil über P mit Fuß K . Dann ist W ein $(d + 1)$ -Polytop mit $n + 1$ Facetten und sein Durchmesser beträgt mind. $\Delta(d, n)$. Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Nehmen wir nun an, daß $n \leq 2d$ erfüllt ist und sei (Q, x, y) ein Tripel der Klasse $(d + 1, n + 1)$, so daß $\delta_Q(x, y) = \Delta(d + 1, n + 1)$ ist. Da Q weniger als $2(d + 1)$ Facetten hat, muß es eine Facette P geben, die sowohl zu x als auch zu y inzident ist (Schubfachprinzip). P selbst ist ein d -Polytop mit höchstens n Facetten und es gilt $\delta_P(x, y) \geq \delta_Q(x, y)$. Die Umkehrung folgt mit der zweiten Aussage von Proposition 5.26. Damit ist die Gleichheit bewiesen. \square

Um mit dem Beweis fortzufahren, benötigen wir noch zwei Definitionen:

Definition 5.28 (Dantzig-Gestalt)

Eine *Dantzig-Gestalt* (engl: Dantzig figure) ist ein Tripel (P, x, y) der Klasse $(d, 2d)$, so daß exakt d Facetten inzident zu x sind und die restlichen d Facetten inzident zu y sind. Der Begriff geht auf eine Frage zurück, die von Dantzig in [4] gestellt wurde: Was ist das Maximum der $\delta_P(x, y)$ für alle (P, x, y) , die beschränkte d -dimensionale Dantzig-Gestalten sind. Die Frage wurde bis heute nicht beantwortet, läßt sich aber mit einer Gegenfrage beantworten: Wie sehen die Werte von $\Delta(d, n)$ aus?

Definition 5.29 (W_v -Pfad)

Sei P ein Polyeder und $p = ([x_0, x_1], \dots, [x_{l-1}, x_l])$ ein Pfad auf P . p heißt W_v -Pfad, falls für $i < j < k$ gilt, daß x_j inzident zu *einer* Facette ist, wenn diese Eigenschaft auch schon für x_i und x_k gilt. Umgangssprachlich formuliert ist ein W_v -Pfad ein Pfad, welcher keine Facette eines Polyeders P mehrmals besucht.

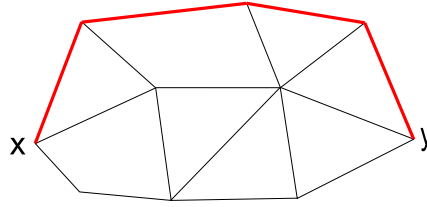


Abbildung 28: W_v -Pfad auf einem Polytop

Beispiel 5.30 (W_v -Pfad)

Abbildung 28 zeigt einen W_v -Pfad auf einem Polytop mit 9 Gesichtern. Es mag den Leser zunächst verwirren, daß nicht der direkte Pfad von x nach y genommen wird. Des Rätsels Lösung ist die Anzahl der Gesichter: Das Polytop ist 3-dimensional und das neunte Gesicht befindet sich unten. Folglich würde bei der Wahl des direkten Pfades dieses neunte Gesicht zwei Mal besucht werden.

Die folgende Proposition stellt einige Eigenschaften solcher W_v -Pfade vor. Wir werden diese nicht beweisen:

Proposition 5.31 (Eigenschaften von W_v -Pfadern)

1. Ein Pfad in einem Gesicht F eines Polyeders P ist ein W_v -Pfad in F genau dann, wenn er ein W_v -Pfad in P ist.
2. Ein Pfad im Produkt zweier Polyeder ist ein W_v -Pfad genau dann, wenn seine Projektionen auf die Faktoren W_v -Pfade sind.
3. Falls ein Pfad in einem Keil über einem Polyeder P ein W_v -Pfad ist, so liegt seine Projektion vollständig in P .

Nun benötigen wir noch ein Lemma, um den Beweis endlich abzuschließen. Dieses verdeutlicht die Beziehungen zwischen den bisher kennengelernten Begriffen und führt uns schließlich zu dem finalen Theorem:

Lemma 5.32 (Implikationen)

Seien m und d positive ganze Zahlen mit $d \geq 2$, falls $m > 1$. Dann impliziert jede der folgenden Aussagen die jeweils nächste(n):

1. Die Knoten x und y einer beschränkten einfachen m -dimensionalen Dantzig-Gestalt (P, x, y) können durch einen Pfad der Länge höchstens m verbunden werden.
2. Zwei beliebige Knoten eines einfachen Polytops der Klasse $(d, d + m)$ können durch einen W_v -Pfad verbunden werden.
3. Die beschränkte Hirsch' Vermutung ist wahr für die Klasse $(d, d + m)$, d.h. es gilt: $\Delta(d, d + m) \leq m$.

Beweis:

1 \Rightarrow 3: Die zweite Aussage von Proposition 5.27 besagt implizit, daß die beschränkte d -step Conjecture für eine Dimension m wahr ist genau dann, wenn die beschränkte Hirsch' Vermutung für alle Klassen $(d, d + m)$ wahr ist. Diese Tatsache wird später noch deutlicher werden, wenn wir uns zwei Tabellen mit bekannten Werten der Funktionen $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$ anschauen.

Zum Verständnis: Trägt man d (Zeilen) und $n - d$ (Spalten) gegeneinander auf, so befindet sich der maximale Eintrag einer Spalte stets bei dem Diagonalelement $n = 2d$. Von dort eine Zeile senkrecht nach unten zu gehen, heißt, $d + 1$ und $n + 1$ zu betrachten. Laut Proposition 5.27 gilt dort $\Delta(d, n) = \Delta(d + 1, n + 1)$. Allgemein läßt sich $\Delta(d, n) = \Delta(d + k, n + k) \forall k \geq 0$ folgern,

d.h. unter den Diagonalelementen sind die Einträge konstant. Von dem Diagonalelement eine Zeile senkrecht nach oben zu gehen, heißt, $d - 1$ und $n - 1$ zu betrachten. Hier gilt jetzt aber $n' := n - 1 > 2(d - 1) =: 2d'$. Eine erneute Anwendung der Proposition 5.27 auf n' und d' liefert $\Delta(d - 1, n - 1) \leq \Delta(d, n)$. Allgemein läßt sich $\Delta(d - k, n - k) \leq \Delta(d, n) \quad \forall k < d$ folgern, d.h. die Einträge über den Diagonalelementen sind stets kleiner gleich den Diagonalelementen selbst.

Nun ist der Beweis der Implikation recht einfach:

- Für $d = m$ gilt $\Delta(d, d + m) = \Delta(m, 2m) \leq m$ nach Voraussetzung.
- Für $d > m$ gilt $n := d + m < 2d$, also nach Proposition 5.27 $\Delta(d, d + m) = \Delta(d - 1, d - 1 + m) = \dots = \Delta(m, m + m) \leq m$ nach Voraussetzung.
- Für $d < m$ gilt $n := d + m > 2d$, also gemäß Proposition 5.27 $\Delta(d, d + m) \leq \Delta(d + 1, d + 1 + m) \leq \dots \Delta(m, m + m) \leq m$ nach Voraussetzung.

Damit folgt die Korrektheit der Implikation.

2 \Rightarrow 3: Kann durch Anwendung von Theorem 5.24 und der dritten Aussage von Proposition 5.16 gezeigt werden.

1 \Rightarrow 2: Sei (P, x, y) ein beschränktes einfaches Tripel der Klasse $(d, d + m)$. Setze $y_0 := y$ und sei F_0 das kleinste Gesicht von P , welches inzident zu x und y ist. Dann ist (F_0, x, y_0) ein beschränktes einfaches Tripel der Klasse $(d', d' + m')$, mit $d' \leq d$ und $m' \leq m$.

Da keine Facette von F_0 zu sowohl x als auch y_0 inzident ist, gilt $m' = d' + k$, wobei k die Anzahl der Facetten von F_0 ist, die weder zu x noch zu y_0 inzident sind. Falls $k > 0$ gilt, so sei G eine Facette von F_0 , die nicht x und y enthält, und den Keil F_1 über F_0 mit Fuß G festlegt. Das Tripel (F_1, x, y_1) , mit y_1 Knoten über y_0 , ist ein beschränktes einfaches Tripel der Klasse $(d' + 1, d' + m' + 1)$, wobei $k - 1$ Facetten weder zu x oder y_1 inzident sind und keine Facette zu beiden inzident ist.

Wiederholt man diesen Prozess, so erhält man nach k Schritten ein beschränktes einfaches Tripel (F_k, x, y_k) der Klasse $(d' + k, d' + m' + k) = (m', 2m')$, wobei keine Facette zu x und y_k inzident ist.

Nehmen wir nun an, daß die erste Aussage korrekt ist: Mit der Tatsache, daß (F_k, x, y_k) eine einfache Dantzig-Gestalt ist und $m' \leq m$ sowie Aussage 4 von Proposition 5.26 gelten, läßt sich folgern, daß es einen Pfad der Länge höchstens m' von x nach y_k in F_k gibt.

Nach Proposition 5.16 hat ein solcher Pfad Länge m' und muß ein W_v -Pfad sein. Nun projizieren wir diesen W_v -Pfad entgegen der Konstruktion der Tripel (F_i, x, y_i) zurück und erhalten einen W_v -Pfad von x nach y in F .

Damit sind alle Implikationen bewiesen. □

Das zu beweisende Resultat folgt nun direkt aus Lemma 5.32 und Theorem 5.24. Im folgenden Theorem ist das zu Beginn des Kapitels umgangssprachlich formulierte Resultat mathematisch präzise aufgeschrieben:

Theorem 5.33 (Finales Resultat)

Die folgenden vier Aussagen sind äquivalent:

1. Zwei beliebige Knoten eines einfachen Polytops können durch einen W_v -Pfad verbunden werden.
2. Die beschränkte Hirsch' Vermutung ist wahr für alle d und n mit $1 \leq d < n$.
3. Die beschränkte d -step Conjecture ist wahr für alle d .
4. Für jede einfache d -dimensionale beschränkte Dantzig-Gestalt (P, x, y) gilt: $\delta_P(x, y) = d$.

Mit dem Beweis dieses Theorems sind wir am Ende dieses Kapitels angekommen. Was haben wir nun erreicht? Es wurde gezeigt, daß die Korrektheit der beschränkten d -step Conjecture auch schon die Korrektheit der beschränkten Hirsch' Vermutung impliziert. Bei der Beweisführung haben wir mehrere Reduktionen sowie Vereinfachungen bewiesen, die das Studium der Hirsch' Vermutung sehr vereinfachen. Auch wenn wir damit immer noch keine wirkliche Antwort auf die Frage nach der Korrektheit der Hirsch' Vermutung erhalten haben, so haben wir doch einen interessanten Einblick in die Forschung zur Hirsch' Vermutung erhalten.

In den nächsten Kapiteln werden wir uns weiter mit der d -step Conjecture beschäftigen und unter anderem beweisen, daß die beschränkte 5-step Conjecture korrekt ist. Weiter werden wir bekannte Werte der Funktionen $\Delta(d, n)$ und $\Delta_u(d, n)$ kennenlernen, an deren Entdeckung Klee und Walkup [19] maßgeblich beteiligt waren.

6 Schlegel-Diagramme und weitere Hilfsmittel

Dieses Kapitel beinhaltet das *Handwerkszeug*, welches im Beweis der 5-step Conjecture im Kapitel 8 benötigt wird. Als erstes werden Schlegel-Diagramme eingeführt und anschließend noch zwei wichtige Theoreme bewiesen.

6.1 Schlegel-Diagramme

In diesem Abschnitt werden Schlegel-Diagramme eingeführt. Es werden keine Beweise geführt, sondern lediglich ein Gefühl anhand von Beispielen vermittelt, wie Schlegel-Diagramme konstruiert werden und zu welchem Zweck sie dienen.

Definition 6.1 (Schlegel-Diagramm)

Sei P ein d -Polytop im \mathbb{R}^d und sei $F \in L(P)$ eine Facette von P , definiert durch die gültige Ungleichung $ax \leq z$. Im folgenden bezeichnet

$$H := \text{aff}(F) = \{x \in \mathbb{R}^d : ax = z\}$$

die Hyperebene aufgespannt von F . Wähle nun einen Punkt y_F *hinter* F . Für ein $x \in P$ definiert man

$$p(x) := y_F + \frac{z - ay_F}{ax - ay_F}(x - y_F).$$

Das Schlegel-Diagramm von P basierend auf der Facette F , welches auch mit $\mathcal{D}(P, F)$ bezeichnet

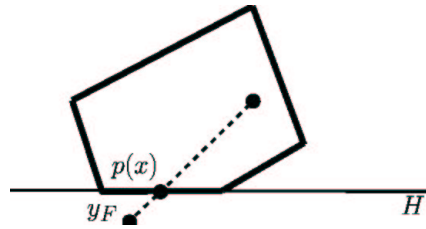


Abbildung 29: Konstruktion eines Schlegel-Diagramms

net wird, ist das Bild unter p von allen echten Facetten von P anders als F . Das heißt, ein Schlegel-Diagramm ist das Mengensystem $\mathcal{D}(P, F) := \{p(G) : G \in L(P) \setminus \{P, F\}\}$, welches in der Hyperebene H enthalten ist.

Die Definition 6.1 geht auf Victor Schlegel [23] zurück. Die interessante Eigenschaft der Schlegel-Diagramme besteht darin, dass man die kombinatorische Struktur eines d -dimensionalen Polytops in ein $(d - 1)$ -dimensionales Objekt stecken kann. $\mathcal{D}(P, F)$ ist nun ein Polytop-Komplex, welches in der $(d - 1)$ -dimensionalen Hyperebene $H = \text{aff}(F)$ enthalten ist.

Im folgenden nun einige Beispiele, die die eben eingeführte Definition der Schlegel-Diagramme illustrieren:

Beispiel 6.2 (3-Polytop)

Abbildung 30 zeigt die Konstruktion eines Schlegel-Diagramms eines einfachen 3-Polytops.

Beispiel 6.3 (Prisma)

In Abbildung 31 wird ein 3-dimensionales Prisma (konstruiert sich als Produkt eines Rechtecks mit einem 1-Polytop) in ein Schlegel-Diagramm überführt. Da das Prisma nicht-isomorphe Facetten besitzt (offensichtlich), existieren verschiedene Schlegel-Diagramme zu diesem Prisma.

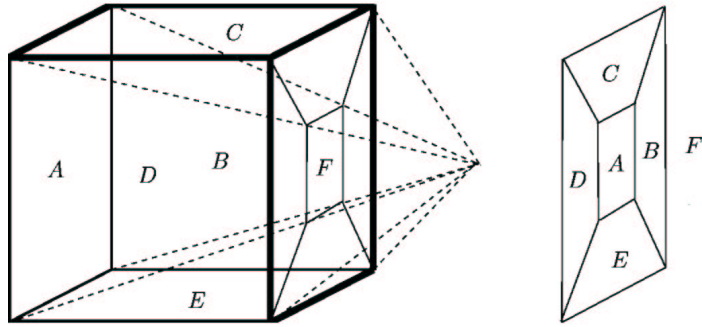


Abbildung 30: Beispiel für die Konstruktion des Schlegel-Diagramms eines 3-Polytops

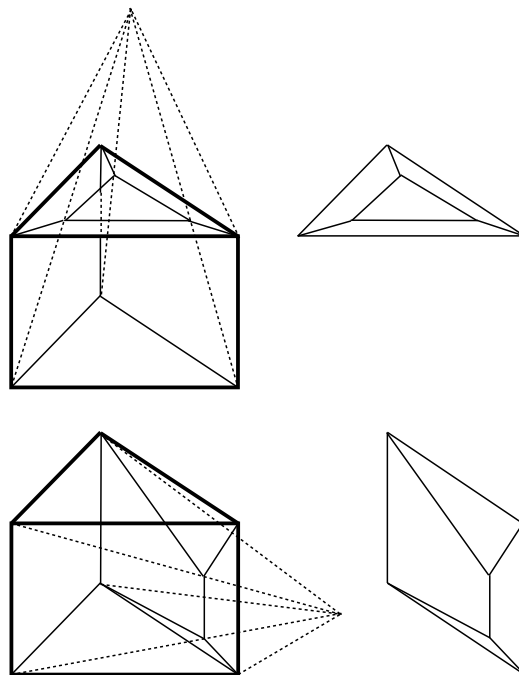


Abbildung 31: 2 Schlegel-Diagramme eines Prismas

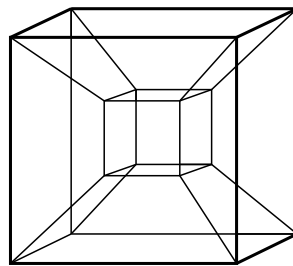


Abbildung 32: 4-dimensionaler Kubus mit 3-dimensionalem Schlegel-Diagramm

Beispiel 6.4 (4-Polytop)

In Abbildung 32 ist ein 4-dimensionaler Kubus mit 3-dimensionalem Schlegel-Diagramm dargestellt. Ein Kubus besteht aus 8 3-dimensionalen Facetten, die die Form eines Kegelstumpfes haben.

6.2 Weitere Beweishilfsmittel

Theorem 6.5 (Balinski's Theorem)

Der Graph $G(P)$ ist d -fach-zusammenhängend für jedes d -Polytop P .

Beweis:

Sei $P = \text{conv}(V) \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei die Knotenmenge V von P sowie der Graph $G(P)$ mindestens $d+1$ Elemente haben. Entferne nun eine $d-1$ -elementige Teilmenge $S = \{v_1, \dots, v_{d-1}\} \subseteq V$. Es muss nun gezeigt werden, dass der Graph $G(P) \setminus S$ noch zusammenhängend ist. Sei $s := \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} d_i \in P$ der Schwerpunkt der Knotenmenge S . Wir wissen, dass s im relativen Inneren eines Gesichtes von P enthalten ist. Wir unterscheiden nun folgende zwei Fälle:

Fall 1:

Wenn s in einem echten Gesicht $F \in L(P) \setminus \{P\}$ enthalten ist, dann sind auch alle Punkte $v_i \in S$ enthalten in diesem Gesicht – dies ist die normale Berechnung. Sei $cx \leq c_0$ eine gültige Ungleichung, die F definiert. c_0 ist dann der größte Wert, den cx auf P annehmen kann, der kleinste Wert ist irgendein $g_0 < c_0$. In diesem Fall liegt jeder Knoten aus $V \setminus S$ im Gesicht $F_0 = \{x \in P : cx = g_0\}$ oder er hat einen Nachbarn, der einen geringeren cx Wert hat und der dafür ebenfalls in $V \setminus S$ liegt. Folglich hat jeder Knoten aus $V \setminus S$ einen kleiner werdenden Pfad im Bereich von $V \setminus S$, welcher ihn mit einem Knoten in F_0 verbindet. Mit Induktion über d folgt, dass der Graph von F_0 zusammenhängend ist.

Fall 2:

Wenn s zum Inneren von P gehört, wählen wir die lineare Funktion $cx \in \mathbb{R}^d$ so, dass die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^d : cx = c_0\}$ sowohl S also auch einen beliebigen anderen Knoten $v_0 \in V \setminus S$ enthält. Dies ist möglich, da jede Menge von d Punkten in der Hyperebene enthalten ist. Sei nun c_{max} und c_{min} der größte bzw. kleinste Wert, den cx auf P annehmen kann und bezeichne mit F_{max} und F_{min} die dazugehörigen Gesichter. Jeder Knoten $v \in V \setminus S$ ist entweder durch einen strikt cx -steigenden Pfad mit F_{max} (wenn gilt: $cv \geq c_0$) oder durch einen strikt kleiner werdenden Pfad mit F_{min} (wenn gilt: $cv \leq c_0$) verbunden. Schließlich wird der extra Knoten v_0 noch mit F_{max} und F_{min} verbunden, so dass der ganze Graph $G(V) \setminus S$ zusammenhängend ist. \square

Korollar 6.6

Sei $k \geq 2$. Ist ein Graph G k -fach-zusammenhängend, so existieren in G zwischen zwei beliebigen Knoten k paarweise innen knotendisjunkte Wege.

Theorem 6.7 (Steinitz' Theorem)

G ist der Graph eines 3-dimensionalen Polytops genau dann, wenn dieses einfach, planar und 3-fach zusammenhängend ist.

Beweis:

Siehe [30], Kapitel 4, Seite 103ff. \square

7 Die Eigenschaft A

In diesem Kapitel wird die *Eigenschaft A* definiert. Sie spielt in dem Beweis der d -step Conjecture im folgenden Kapitel 8 eine zentrale Rolle.

Definition 7.1 (Eigenschaft A)

Einem d -Polytop Q wird die *Eigenschaft A* zugeordnet, wenn Q zwischen $2d + 1$ und $2d + 2$ viele Facetten hat und zusätzlich folgendes gilt: Wenn die Facetten von Q in zwei disjunkte Mengen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} , wobei jede aus maximal $d + 1$ Facetten besteht, aufgeteilt werden und wenn X bzw. Y die Menge aller Knoten von Q , die lediglich von Elementen von \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} umgeben sind, bezeichnet ($X, Y \neq \emptyset$), dann besitzt Q einen Pfad der Länge höchstens d von irgendeinem Element $x \in X$ zu irgendeinem Element $y \in Y$.

Proposition 7.2

Jedes einfache d -Polytop mit $\leq 2d$ vielen Facetten besitzt *Eigenschaft A*.

Die Aussage 7.2 ist nichts weiter als eine Abschwächung der d -step Conjecture.

Es folgt nun ein Beispiel für die Definition 7.1.

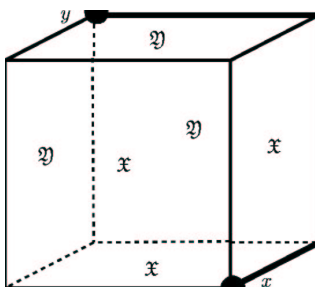


Abbildung 33: Beispiel für *Eigenschaft A*

Beispiel 7.3 (Beispiel für Eigenschaft A)

Abbildung 33 zeigt ein Beispiel für die Definition 7.1. Zu sehen ist ein einfaches 3-Polytop. Die Klassen \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} haben je 3 Elemente ($\leq (d + 1) = 4$), die Mengen $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ bestehen jeweils aus einem Element. Offensichtlich lässt sich x mit y durch einen Pfad der Länge 3 ($\leq d = 3$) verbinden (in der Abbildung sind dies die fett dargestellten Kanten).

Im folgenden wird die Proposition 7.2 für den Fall $d = 2$ betrachtet. Betrachte hier zunächst ein

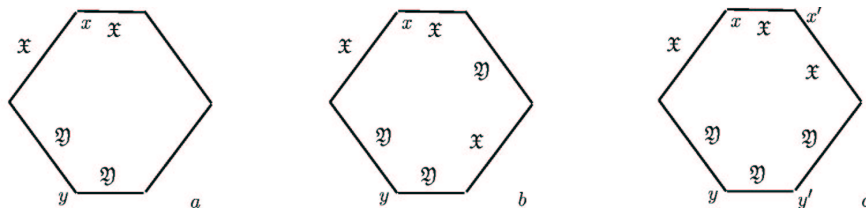


Abbildung 34: Zum Beweis der Proposition 7.2 für den Fall $d = 2$

2-Polytop mit 4 bzw. 5 Facetten - es müssen mindestens 4 Facetten sein, da sonst die Mengen X bzw. Y aus *Eigenschaft A* trivialerweise nicht gebildet werden können. Nach Beispiel 4.2 ist bekannt, dass $\Delta(2, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ gilt. Für die Fälle $n = 4$ bzw. $n = 5$ ergibt dies $\Delta(2, n) = 2$; das 2-Polytop hat also *Eigenschaft A*. Für den letzten, noch übrig gebliebenen Fall $n = 6$ gibt Abbildung 34a Aufschluss.

Zu sehen ist ein 2-Polytop P mit 6 Facetten. Um ein Element $x \in X$ zu erhalten, muss es mindestens einen Knoten in P gegeben, der nur von Elementen aus \mathfrak{X} umgeben ist. Analog muss dieses auch für ein $y \in Y$ gelten. Die 2 restlichen, noch nicht einer Klasse \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} zugeordneten Facetten können nun entweder so wie in der Abbildung 34b dargestellt angeordnet werden oder wie

in Abbildung 34c. Im Falle von Abbildung 34b entstehen keine neuen Elemente für die Mengen X bzw. Y und x und y können durch einen Weg der Länge 2 verbunden werden. Im Falle von Abbildung 34c entsteht ein neues $x' \in X$ und ein neues $y' \in Y$. Hier gilt also offensichtlich immer noch, dass irgendein Element aus X mit irgendeinem Element aus Y durch einen Pfad der Länge ≤ 2 verbunden werden kann. Damit wären bis auf Symmetrie alle Fälle abgehandelt, womit die Aussage gezeigt wäre.

Im folgenden wird nun gezeigt, dass die Proposition 7.2 für den Fall $d = 4$ nicht mehr erfüllt ist. Der Fall $d = 3$ wird im nächsten Kapitel im Beweis der 5-step Conjecture behandelt.

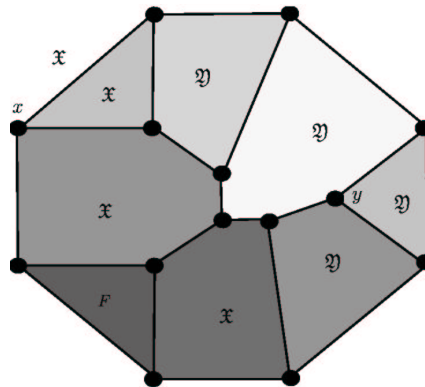


Abbildung 35: Polytop zur Konstruktion eines Keils

Für den Fall $d = 4$ erweitern wir das Polytop aus Abbildung 35 um einen Keil. Das Polytop in Abbildung 35 ist offensichtlich planar, 3-wertig und 3-fach-zusammenhängend. Mit Theorem 6.7 (Steinitz) folgt, dass es demzufolge mindestens gleichwertig mit dem Schlegel-Diagramm eines einfachen 3-Polytops T ist. Sei W nun der Keil über T mit Fuß F (siehe Abbildung 36). Die untere Basis von W wird der Klasse \mathfrak{X} , die obere Basis der Klasse \mathfrak{Y} zugewiesen. Die seitlichen Facetten werden ebenfalls \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} entsprechend ihrer Labels (siehe Abbildung 36) mit ihrem Schnitt mit der unteren Basis zugeordnet. Folglich ist $X = \{x\}, Y = \{y^*\}$ und $\delta_W(x, y^*) = 5$. W erfüllt also nicht die *Eigenschaft A*, obwohl W ein einfaches Polytop der Klasse $(4, 10)$ ist.

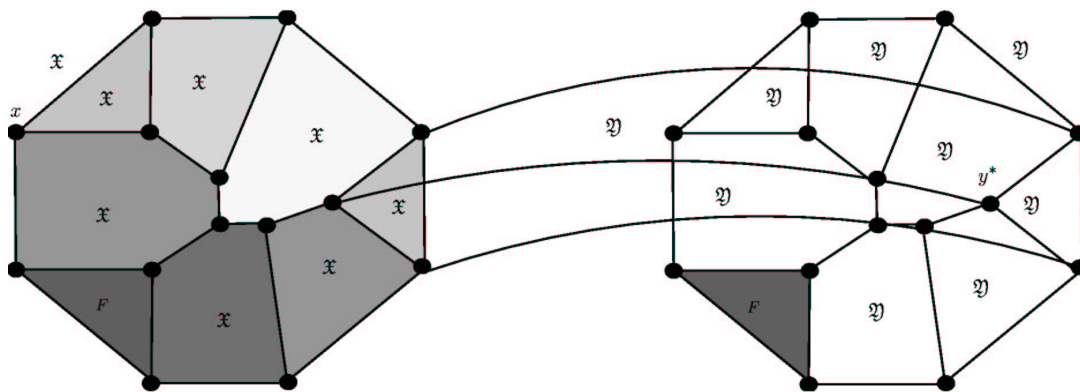


Abbildung 36: Keil über dem Graphen aus Abbildung 35

Für den Fall $d = 5$ lässt sich ebenfalls ein Gegenbeispiel eines einfachen 5-Polytops mit 11 Facetten konstruieren, dass die *Eigenschaft A* verletzt. Siehe hierzu [19], Kapitel 4, Seite 69ff. Für den Fall

$d = 6$ wird vermutet, dass es ein 6-Polytop der Klasse $(6, 12)$ gibt, das ebenfalls die *Eigenschaft A* nicht erfüllt. Hiermit wäre dann also auch die nicht Korrektheit der 6-step Conjecture gezeigt.

8 Beweis der 5-step Conjecture

In diesem Kapitel wird der Beweis geführt, dass die 5-step Conjecture korrekt ist. Hierbei werden die erarbeiteten Resultate aus den vorherigen Kapiteln benutzt. Es ist bereits bekannt, dass die d -step Conjecture für $d < 5$ korrekt ist. Es bleibt also noch der Fall $d = 5$ zu zeigen. Wie bereits in Theorem 5.24 gezeigt wurde, genügt es, um die d -step Conjecture zu beweisen, $\delta_P(x, y) \leq d$ zu zeigen, für den Fall, dass (P, x, y) eine d -dimensionale Dantzig-Gestalt ist.

In dem Beweis spielen neben den bereits erarbeiteten Resultaten die folgenden beiden Lemmata eine zentrale Rolle:

Lemma 8.1

Eine Dantzig-Gestalt (P, x, y) der Dimension d besitzt einen $(1, d-2, 1)$ -Pfad (f, Q, g) von x nach y , wobei Q ein $(d-2)$ -dimensionales Polytop mit höchstens $2d-2$ und mindestens $2d-4$ Facetten ist.

Lemma 8.2

Jedes einfache 3-Polytop mit 6, 7 oder 8 Facetten hat *Eigenschaft A*.

Mit Lemma 8.1 und Lemma 8.2 und der folgenden Proposition 8.3 folgt schließlich das ersehnte Resultat, die Korrektheit der 5-step Conjecture (Theorem 8.4).

Proposition 8.3

Wenn eine d -dimensionale Dantzig-Gestalt (P, x, y) einen $(1, d-2, 1)$ -Pfad $([x, x'], Q, [y', y])$ enthält, so dass Q die *Eigenschaft A* besitzt, dann gilt $\delta_P(x, y) \leq d$.

Beweis:

Q wird gebildet durch den Schnitt einer x -Facette F mit einer y -Facette G . Jede Facette K von Q ist der Schnitt mit Q und einer eindeutigen Facette $H(K) \neq F, G$ von P . Die Facette K wird nun der Klasse \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} , dementsprechend, ob $H(K)$ nun inzident zu x bzw. y ist, zugeordnet. X, Y werden nun wie in Definition 7.1 definiert. Es ist offensichtlich, dass $x' \in X, y' \in Y$ und jede der Klassen \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{Y} höchstens $(d-1)$ Facetten von Q beinhaltet. Da Q nach Voraussetzung die *Eigenschaft A* hat, existiert ein Pfad der Länge höchstens $(d-2)$ von einem Element $x'' \in X$ zu einem Element $y'' \in Y$. Nach Definition der Klasse \mathfrak{X} und der Tatsache, dass $Q = F \cap G$, folgt, dass sich x'' durch den Schnitt mit $(d-1)$ x -Facetten mit G ergibt. Folglich ist x'' ein Endpunkt einer x -Kante, y'' Endpunkt einer y -Kante und demzufolge existiert ein Pfad der Länge d von x nach y . \square

Theorem 8.4

$$\Delta(5, 10) = 5$$

Beweis:

Sei P eine einfache Dantzig-Gestalt (P, x, y) der Dimension 5. Lemma 8.1 besagt, dass es in dieser Dantzig-Gestalt einen $(1, 3, 1)$ -Pfad (f, Q, g) von x nach y gibt. Das 3-Polytop Q besitzt nun nach Lemma 8.2 die *Eigenschaft A*. Proposition 8.3 besagt nun, dass es einen Pfad von x nach y der Länge $\delta_P \leq 5$ gibt. \square

Nach dieser Beweisskizze, die in Abbildung 37 nochmal graphisch dargestellt ist, wollen wir uns nun den Beweisen von Lemma 8.1 und Lemma 8.2 widmen.

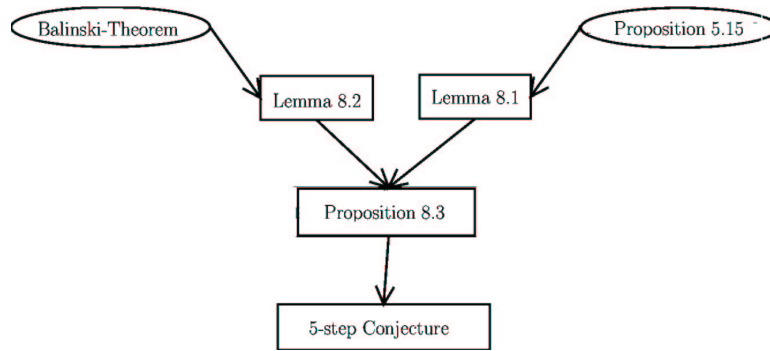


Abbildung 37: Beweisskizze für die 5-step conjecture

Beweis von Lemma 8.1

Gegeben sei eine d -dimensionale Dantzig-Gestalt (P, x, y) . Die Gestalt besitzt $2d$ Facetten, wobei genau d -Facetten inzident zu x und d -Facetten inzident zu y sind (siehe Abbildung 38). Oder

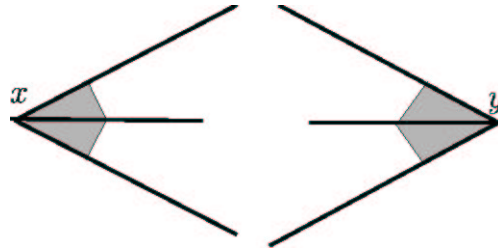


Abbildung 38: Allgemeine Dantzig-Gestalt

anders ausgedrückt, die $2d$ -vielen Facetten zerfallen in 2 disjunkte Mengen zu je d -Stück (*). Jede x -Kante führt auf eine y -Facette. Dieses folgt aus Proposition 5.16 (3). Diese besagt nämlich, dass wenn man auf einem Pfad von einem Knoten x_i zu einem Knoten x_{i+1} geht, genau eine Facette von P verlassen und eine neue Facette besucht wird. Aus dem Schubfachprinzip und der Aussage (*) folgt, dass sogar jede x -Kante auf genau eine y -Facette führt (Umkehrung gilt auch) (**).

Aus dieser Beobachtung folgt, dass es in P einen $(1, d-1)$ -Pfad (f, G) und auch einen $(d-1, 1)$ -Pfad (F, g) von x nach y in P gibt. Es wird nun gezeigt, dass wenn $f \subseteq F$ auch $g \subseteq G$ gilt. Aus der Definition der Dantzig-Gestalt folgt, dass x und y nicht beide inzident zu ein und derselben Facette sein können, x und y demzufolge also auch nicht beide in G bzw. F liegen können. Studiere nun einen Pfad, beginnend mit einer x -Kante f und endend mit einer y -Facette G . Starte nun von y aus mit einer y -Kante $g \subseteq G$. Kann es nun passieren, dass man eine Facette trifft, so dass $f \notin F$? Würde man eine Facette dieser Art treffen, so wäre diese das Komplement von f (einzige Möglichkeit). In diesem Fall wählt man einfach ein anderes $g \in G$ und landet nun zwangsweise in F .

Um das gewünschte Resultat, nämlich dass es einen $(1, d-2, 1)$ -Pfad in P gibt, zu erhalten, untersuchen wir nun den Pfad $(f, F \cap G, g)$. Der Schnitt von $F \cap G$ ist offensichtlich nach den Vorüberlegungen nicht leer. Nun wollen wir Proposition 5.16(2) verwenden. Hieraus folgt, dass $F \cap G$ ein $(d-2)$ -Gesicht sein muss. Folglich ist $(f, F \cap G, g)$ ein $(1, d-2, 1)$ -Pfad.

Um das Lemma 8.1 vollständig zu beweisen, muss noch gezeigt werden, dass in (P, x, y) auf dem $(1, d-2, 1)$ -Pfad (f, Q, g) Q höchstens $2d-2$ Facetten hat. Aus der Definition der Dantzig-Gestalt folgt, dass P genau $2d$ Facetten F besitzt, wovon jede Facette F von P maximal $2d-1$ weitere (Sub-)Facetten besitzt. Dies ist deshalb so, weil eine (Sub-)Facette von F nach Proposition 5.16(b) durch den Schnitt von F mit einer anderen Facette G von P entsteht. Da es aber genau $2d-1$

viele solche anderen Facetten gibt, kann F höchstens noch $2d - 1$ viele (Sub-)Facetten haben. Es können aber auch weniger sein, falls ein solches G einen leeren Schnitt mit F hat (Beispiel Würfel). Tatsächlich hat F entweder nur $2d - 1$ oder $2d - 2$ (Sub-)Facetten. Überhaupt ist hier nur der Fall $2d - 1$ interessant, da man für $2d - 2$ mit Induktion argumentieren kann (3-step Conjecture und 4-step Conjecture sind bereits bewiesen): (E sei F zu y inzident (andernfalls zu x , d.h. Symmetrie). Dann nehme einen $(1, d - 1)$ -Pfad (f, F) mit $f = [x, z]$ und z, y in F . Da F ein $d - 1$ -dimensionales Polytop mit $2d - 2$ (Sub-)Facetten ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung die $d - 1$ -step Conjecture, d.h. es existiert ein Pfad der Länge $d - 1$ von z nach y . Zusammen mit f erhält man einen Pfad der Länge d von x nach y .

Nun aber zurück zu Q . Q hat höchstens $2d - 2$ viele (Subsub-)Facetten, auch wie oben entsteht jede davon durch Schnitt von Q mit einer Facette G von P , die Q nicht sowieso schon komplett enthält. Da aber auch Q durch den Schnitt von 2 Facetten von P gebildet wurde, bleiben maximal $2d - 2$ viele G 's als potentielle Schnittpartner. Die in Lemma 8.1 geforderte untere Grenze für Q von $2d - 4$ viele (Subsub-)Facetten ist für den Beweis der 5-step Conjecture uninteressant. Interessant sind nur die Fälle $2d - 3$ und $2d - 2$, denn alle anderen lassen sich durch Induktion abhandeln. Man braucht also das Lemma 8.2 nur für 7 und 8 Facetten zu beweisen.

Beweis von Lemma 8.2 (durch Widerspruch)

Angenommen, G ist ein einfaches 3-Polytop mit 6, 7 oder 8 Facetten, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, X$ und Y wie in der Definition 7.1 der Eigenschaft A gewählt, mit der Annahme, dass keine zwei Elemente von X und Y durch einen Pfad der Länge kleiner gleich 4 verbunden werden können. Betrachte nun nacheinander alle Knoten $x \in X, y \in Y$. Bezeichne nun mit v die Anzahl der Knoten, e die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Facetten von G , dann gilt $v - e + f = 2$ (Euler-Theorem). Da G einfach ist, gilt ebenso $3v = 2e$, mit dem Euler-Theorem folgt also $v = 2f - 4$. Nun hilft das in Kapitel 6 bewiesene Theorem 6.5 von Balinski weiter sowie das daraus resultierende Korollar 6.6.

Mit diesen Erkenntnissen nun zurück zum Graphen G . Wir wissen nun, dass nach Balinski der Graph 3-fach-zusammenhängend ist und deshalb nach Korollar 6.6 je zwei Knoten aus G , also auch x, y , durch 3 innen knotendisjunkte Pfade verbunden werden können. Ein Pfad muss nach Voraussetzung aber Länge mind. 4 haben, folglich muss $v \geq 11$ gelten. Da aber $v = 2f - 4$, muss $f = 8$ und $v = 12$ gelten. Demzufolge müssen wir die folgenden 2 Fälle betrachten:

1. Für jede Wahl der 3 disjunkten Pfade von x nach y haben 2 Pfade die Länge 4 und einer die Länge 5. (Jeder Knoten von G liegt auf einem Pfad)
2. Die Knoten x und y werden durch 3 Pfade der Länge exakt 4 erreicht. (Ein Knoten von G liegt auf keinem Pfad)

Zuerst jedoch betrachten wir irgendeinen Pfad der Länge 4 von x nach y , wobei wir uns besonders die Kanten anschauen, die inzident zu den 3 inneren Knoten sind. Es ist offensichtlich, dass diese nicht alle gleichzeitig auf ein und derselben Seite sein können (siehe Abbildung 39a), denn dann wäre eine Facette inzident zu x und y , was im Widerspruch zu der Konstruktion der Klassen \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} und den Mengen X, Y steht. Sie können ebenfalls nicht alternieren, wie in Abbildung 39b zu sehen ist. Wäre nun $W \in \mathfrak{X}$, müsste $x' \in X$ gelten und $\delta(x', y) = 3$. Wäre $W \in \mathfrak{Y}$, müsste $y' \in X$ gelten und $\delta(x, y') = 3$. Darum, bis auf Symmetrie, also ein Tausch von (\mathfrak{X}, X, x) und (\mathfrak{Y}, Y, y) , kommt nur folgende, in Abbildung 39c dargestellte Möglichkeit, mit $W \in \mathfrak{Y}$ in Frage, da $W \in \mathfrak{X}$ impliziert, dass $x'' \in X$ und $\delta(x'', y) = 3$ gelten muss.

Betrachten wir nun Fall 1:

Da es sich nach Voraussetzung um disjunkte Wege handelt, können keine 2 Knoten eines Pfades durch eine Kante verbunden werden, es sei denn, diese Kante liegt auf dem Pfad. Andernfalls würde ein Pfad nämlich verkürzt werden. Bezeichne im folgenden mit A, B und C die innen liegenden Knoten der 3 Pfade, wobei B aus 4 Knoten besteht. Nach Konstruktion ist dann jedes Element

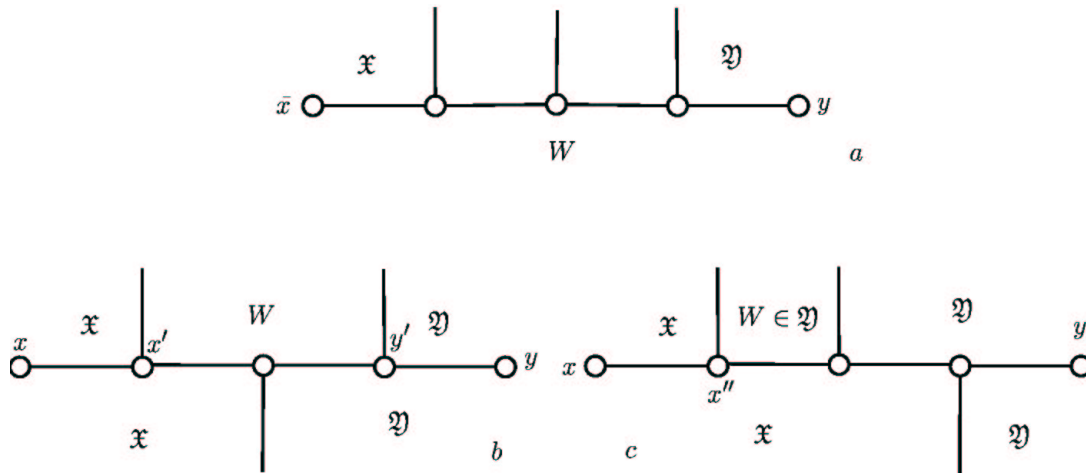


Abbildung 39: Irgendein Pfad der Länge 4 von x nach y

von B adjazent zu einem Element von $A \cup C$ und in der Tat, 2 sind adjazent zu A und 2 zu C . Das Resultat aus Abbildung 39 und die Annahme, dass $\delta(x, y) \geq 4$ gelten soll, führt dazu, die Facetten von G wie in Abbildung 40a, bis auf Symmetrie von (X, X, x) und (Y, Y, y) , anzuordnen. Vergleicht man nun den oberen und unteren Pfad von x nach y in Abbildung 40a mit Abbildung 39c, kommt man zu der Schlussfolgerung, dass \mathfrak{Y} 5 Facetten enthält. Dieses steht jedoch im Widerspruch zur Annahme, da laut dieser $\mathfrak{Y} \leq 4$ gelten muss. \Rightarrow Fall 1 kann nicht auftreten!

Betrachten wir nun Fall 2:

Geht analog zu Fall 1. Bis auf Symmetrie werden die Gesichter von G wie in Abbildung 40b angeordnet. Wie im analogen Fall 1 kommt man auch hier zu einem Widerspruch, da \mathfrak{Y} 5 Elemente besitzt, was nach Annahme aber nicht erlaubt ist. \Rightarrow Fall 2 kann nicht auftreten! \square

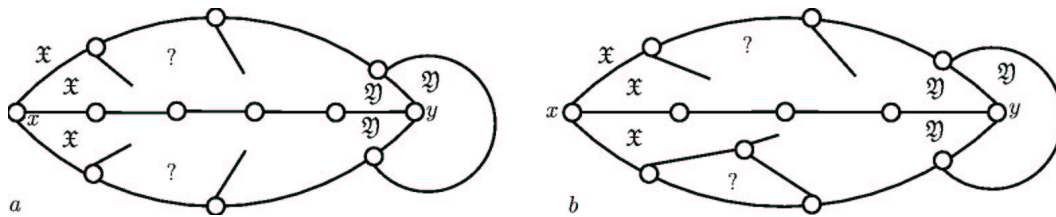


Abbildung 40: Beweissituationen für Lemma 8.2

Mit diesen Beweisen ist das Kapitel über die 5-step Conjecture abgeschlossen. Im nächsten, letzten Kapitel, wird nochmal ein kurzer Überblick über die in dieser Arbeit gemachten Resultate sowie über weitere, verwandte Arbeiten gegeben.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Abschließend werden noch einmal die wichtigsten Resultate zusammengefasst und ein Ausblick auf weitere Forschungen in diesem Bereich gegeben. Wie schon in den vorherigen Kapiteln erwähnt, wird zwischen der unbeschränkten und beschränkten Hirsch' Vermutung bzw. der unbeschränkten und beschränkten d -step Conjecture unterschieden. Die folgenden beiden Abschnitte zeigen die wichtigsten Ergebnisse in tabellarischer Übersicht.

9.1 Resultate der beschränkten d -step Conjecture

Die Tabelle 2 zeigt eine Übersicht zu bekannten Werten (nach Erscheinen von [19]) für $\Delta(d, n)$. Die Hauptdiagonale (d -step Conjecture, $n = 2d$) ist jeweils fett gedruckt. Die Sterne deuten an, daß eine Spalte ab dort konstant ist (dieses folgt aus Proposition 5.27). Die Werte für $d = 2$ sind klar, wie bereits an einem Beispiel gesehen wurde. Die Werte für $\Delta(3, n)$ und $\Delta(d, n)$ für $n - d \leq 4$ wurden von Klee [14, 15, 16] gefunden. Die restlichen Werte wurden von Klee und Walkup [19] ermittelt. Der Beweis für den Wert $\Delta(5, 10) = 5$ wurde im vorherigen Kapitel geführt.

	1	2	3	4	5	6	7	...	$n - d$...
1	1	-	-	-	-	-	-	...		
2	*	2	2	3	3	4	4	...	$\Delta(2, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	
3		*	3	3	4	5	5	...	$\Delta(3, n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1$	
4			*	4	5	?	?			
5				*	5	?	?			
6					*	?	?			
7						*	?			
⋮										
d										
⋮										

Tabelle 2: Bekannte Werte von $\Delta(d, n)$

9.2 Resultate der unbeschränkten d -step Conjecture

Die Tabelle 3 zeigt eine Übersicht zu bekannten Werten (nach Erscheinen von [19]) für $\Delta_u(d, n)$. Es gelten dieselben Anmerkungen wie bei Tabelle 2.

Das wichtigste Ergebnis dieser Tabelle ist die Erkenntnis, dass $\Delta_u(4, 8) = 5$, die unbeschränkte d -step Conjecture also falsch ist, da eigentlich $\Delta_u(4, 8) \leq 4$ gelten müsste. Dieser Beweis wurde nicht in dieser Ausarbeitung geführt, kann aber in [19], Seite 72ff, nachgeschlagen werden. Folglich ist die auch die Hirsch' Vermutung für unbeschränkte Polytope falsch.

	1	2	3	4	5	6	...	$n - d$...
1	1	-	-	-	-	-	...		
2	*	2	3	4	5	6	...	$\Delta_u(2, n) = n - 2$	
3		*	3	4	5	6	...	$\Delta_u(3, n) = n - 3$	
4			*	5	?	?			
5				*	?	?			
6					*	?			
⋮									
d									
⋮									

Tabelle 3: Bekannte Werte von $\Delta_u(d, n)$

9.3 Strong d -step Conjecture

In Kapitel 4 wurden Varianten der Hirsch' Vermutung, z.B. die monotone bzw. strikt monotone Hirsch' Vermutung, genannt. Der Absatz beschäftigt sich mit einer weiteren Variante der d -step Conjecture, nämlich mit der *strong d -step Conjecture*.

Die berühmte d -step Conjecture der Linearen Programmierung ist äquivalent zur Aussage, dass es in einer Dantzig-Gestalt (P, x, y) mehr als einen Pfad von x nach y mit genau d Knoten gibt. Die *strong d -step Conjecture* macht eine striktere Aussage, nämlich, dass die Anzahl solcher Pfade $\geq 2^{d-1}$ ist. Diese Aussage der *strong d -step Conjecture* kann für $d \leq 4$ bewiesen werden, hingegen für $d \leq 5$ wird sie widerlegt.

9.4 Allgemeines

Theorem 9.1 (Lee 1991)

Jedes einfache d dimensionale Polytop P mit n Facetten kann durch eine Facette eines $d + 1$ dimensionalen Polytops Q mit $n + 1$ Facetten realisiert werden, so dass der Durchmesser von Q immer kleiner gleich $2n - 2d$ ist.

Dieses Theorem besagt, dass, wenn man ein Lineares Programm, durchführbar auf einer begrenzten Region und beginnend mit einem zufälligen Startknoten, dadurch vergrößert, indem man es durch Hinzufügen einer Variablen und einer linearen Ungleichung erweitert, man das Optimum nun durch eine lineare Anzahl von Pivot-Schritten berechnen kann.

Literatur

- [1] K.H. Borgwardt: The average number of pivot steps required by the simplex method is polynomial, *Zeitschrift für Operations Research* 26 (1982), pp. 155-177.
- [2] V. Chvátal: *Linear Programming*, W.H. Freeman and Company, 1983.
- [3] G. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton 1963.
- [4] G. Dantzig: Eight unsolved problems from mathematical programming, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), pp. 499-500.
- [5] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, Interscience, London 1967.
- [6] F. Holt & V. Klee: Counterexamples to the strong d -step conjecture for $d \geq 5$, *Discrete Computat. Geom.* 19 (1998), pp. 33-46.
- [7] V. Kaibel: Recursive Random Edge: A New Randomized Pivot Strategy for the Simplex-Algorithm, Folien zum "17th International Symposium on Mathematical Programming", Atlanta, Georgia, Aug. 2000
- [8] G. Kalai: The diameter of graphs of convex polytopes and f -vector theory, in: "Applied Geometry and Discrete Mathematics - The Victor Klee Festschrift" (P. Gritzmann und B. Sturmfels, eds.), DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 4, Amer. Math. Soc. 1991, pp. 387-411.
- [9] G. Kalai: Upper bounds for the diameter and height of graphs of convex polyhedra, *Discrete Comput. Geometry* 8 (1992), pp. 363-372.
- [10] G. Kalai: A subexponential randomized simplex algorithm, in: *Proceedings of the 24th ACM Symposium on Theory of Computing* (1992), pp. 475-482.
- [11] G. Kalai: Linear programming, the simplex algorithm and simple polytopes, in: "Proc. Int. Symp. Mathematical Programming" (Lausanne 1997), *Math. Programming Ser. B* 79 (1997), pp. 217-233.
- [12] G. Kalai & D.J. Kleitman: A quasi-polynomial bound for diameter of graphs of polyhedra, *Bulletin of the American Mathematical Society* 24 (1992), pp. 315-316.
- [13] L.V. Kantorovich: *Mathematical methods in the organization and planning of production* (in Russian). Publication House of the Leningrad State University 68 pp. English Translation: *Management Science*, Volume 6 (1960), pp. 363-422.
- [14] V. Klee: Diameters of polyhedral graphs, *Canadian J. Math.* 16 (1964), pp. 1039-1042.
- [15] V. Klee: Paths on polyhedra I, *J. Soc. Indust. Appl Math.* 13 (1965), pp. 946-956.
- [16] V. Klee: Paths on polyhedra II, *Pacific J. Math.* 17 (1966), pp. 249-262.
- [17] V. Klee & P. Kleinschmidt: The d -step conjecture and its relatives, *Math. Operations Research* 12 (1987), pp. 718-755.
- [18] V. Klee & G.J. Minty: How good is the simplex algorithm?, in: O. Shisha, ed., *Inequalities*, III, pp. 159-175, Academic Press, 1972.
- [19] V. Klee & D.W. Walkup: The d -step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$, *Acta Math.* 117 (1967), pp. 53-78.
- [20] P. Kleinschmidt: The diameter of polytopes and related applications. In: T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider, I.A. Weiss, eds., *Polytopes: Abstract, Convex, and Computational*, pp. 467-492. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

- [21] P. Kleinschmidt & S. Onn: On the diameter of convex polytopes, *Discrete Mathematics* 102 (1992), pp. 75-77.
- [22] D. Naddef: The Hirsch conjecture is true for (0,1)-polytopes, *Math. Programming* 45 (1989), pp. 109-110.
- [23] V. Schlegel: *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde*, Engelmann, Leipzig, Halle 1883: *Nova Acta Leop. Carol. (Verhandlungen der Kaiserlichen Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher)* 44 (1883), pp. 343-359.
- [24] A. Schrijver: *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester New York 1986.
- [25] S. Smale: The problem of the average speed of the simplex method, in: *Proceedings of the 11th International Symposium on Mathematical Programming* (1982), pp. 530-539.
- [26] S. Smale: On the average number of steps in the simplex method of linear programming, *Math. Programming* 27 (1983), pp. 241-262.
- [27] D.A. Spielman & S.-H. Teng: Smoothed Analysis of Algorithms: Why The Simplex Algorithm Usually Takes Polynomial Time, in: *The Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2001), pp. 296-305.
- [28] M.J. Todd: The monotonic bounded Hirsch conjecture is false for dimension at least four, *Mathematics of Operations Research* 5 (1980), pp. 599-601.
- [29] M.J. Todd: The many facets of linear programming, *Math. Program., Ser. B* (2001).
- [30] G.M. Ziegler: *Lectures on Polytopes*, *Graduate Texts in Math.* 152, Springer, New York 1995/98.
- [31] G.M. Ziegler: Lectures on 0/1-polytopes, in: "Polytopes - Combinatorics and Computation" (G. Kalai, G.M. Ziegler, eds.), *DMV Seminar* 29, Birkhäuser, Basel 2000, pp. 1-44.
- [32] G.M. Ziegler: Questions about Polytopes, in: *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, edited by Björn Enquist and Wilfried Schmid, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2000, pp. 1195-1211.