# XI. ÜBUNG ZU RINGE und MODULN

Abgabe: DO, 2. FEBRUAR 2006 in der Übung

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/Ringe_und_Moduln/

**24. Aufgabe:** Sei $A$ eine endlichdimensionale $K$-Algebra. Man zeige, dass $A$ von beschränktem Darstellungstyp ist genau dann, wenn die Dimensionen $\dim(M_K)$ für alle endlich erzeugten unzerlegbaren $A$-Moduln $M$ nach oben beschränkt sind. 4 P.

**25. Aufgabe:** Sei $K$ ein Körper und $n \geq 1$. Die Algebra $A = K[T]/(T^n)$ hat endlichen Darstellungstyp. Die endlich erzeugten, unzerlegbaren $A$-Moduln sind (bis auf Isomorphie gegeben durch $E_i = K[T]/(T^i)$ $(1 \leq i \leq n)$. Dazu gehe man wie folgt vor: 16 P.

**a)** Man zeige zunächst, dass $E_i$ tatsächlich $A$-Moduln sind (was sind deren Annulatoren?). Man berechne die Endomorphismenringe der $E_i$. Zeige, dass die $E_i$ unzerlegbar sind und paarweise nicht-isomorph.

**b)** Sei $E$ endlich erzeugter, unzerlegbarer $A$-Modul. Zeige, dass $E$ endlichdimensionaler, unzerlegbarer $K[T]$-Modul ist.

**c)** Ein endlichdimensionaler $K[T]$-Modul $E$ ist nicht anderes als ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum zusammen mit einem Endomorphismus $f$ (d. h. $K$-linear). (Inwiefern?) Was bedeutet Unzerlegbarkeit für das Paar $(E, f)$? Welche Eigenschaften hat $f$, wenn $E$ wie in b) ist?

**d)** Man verwende Sätze aus der Linearen Algebra II, um einen Epimorphismus $K[T] \longrightarrow E$ mit Kern $(T^i)$ zu konstruieren.

**26. Aufgabe:** Sei $M$ ein Modul und $f : X \longrightarrow Y$ ein Modulhomomorphismus über der $K$-Algebra $A$. Dies induziert eine $K$-lineare Abbildung $\mathrm{Hom}(M, f) : \mathrm{Hom}(M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, Y)$, $h \mapsto f \circ h$. ($\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_A$.)

**a)** Ist

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0 \tag{1}$$

exakt, so ist die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,f)} \mathrm{Hom}(M, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,g)} \mathrm{Hom}(M, Z)$$

exakt. 5 P.

**b)** Es ist $M$ projektiv genau dann, wenn für jede kurze exakte Folge (1) die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,f)} \mathrm{Hom}(M,Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(M,g)} \mathrm{Hom}(M,Z) \to 0$$

exakt ist. 2 P.

**c)** Man definiert analog $\mathrm{Hom}(f,M) : \mathrm{Hom}(Y,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,M)$, $h \mapsto h \circ f$. Wie übersetzen sich die Aussagen a) und b) hierfür? 4 P.

**27. Aufgabe:** Man zeige: Sind $L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N$ Homomorphismen, so gilt

**a)** $\mathrm{Bild}(\psi \circ \phi) \subset \mathrm{Bild}(\psi)$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $M = \mathrm{Bild}(\phi) + \mathrm{Kern}(\psi)$ gilt; 4 P.

**b)** $\ell(\mathrm{Bild}(\psi\circ\phi)) \leq \ell(\mathrm{Bild}(\phi))$, und Gleichheit genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(\phi)\cap\mathrm{Kern}(\psi) = 0$ gilt. 5 P.

Nächste Veranstaltungen: Übung 02.02.2006; Vorlesung, Fr 03.02.2006, 11:00 Uhr