VII. ÜBUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 4. DEZ. 2008, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Menge

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

genau dann ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $c = 0$ gilt.

2. Aufgabe: Sei $V = \mathrm{M}(m; K)$. Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen ein Unterraum von V sind oder nicht.

(a) $U_1 = \{A \in V \mid \mathrm{sp}(A) = 0\}$. (Hierbei ist sp definiert wie in Aufgabe V.2)

(b) $U_2 = \{A \in V \mid A = {}^tA\}$.

(c) $U_3 = \{A \in V \mid \mathrm{rang}(E_m - A) = m\}$.

(d) Sei $B \in \mathrm{M}(n, m; K)$, und $U_4 = \{A \in V \mid B \cdot A = 0\}$.

3. Aufgabe: Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Seien $U_1, \ldots, U_m$ Unterräume von V. Man zeige

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = \mathrm{Span}(U_1 \cup \cdots \cup U_m).$$

(b) Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Man untersuche, unter welchen Bedingungen $U_1 \cup U_2$ ein Unterraum von V ist.

4. Aufgabe: Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Seien $U_1 = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}\}$. Man zeige:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

(b) $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$.

5. Aufgabe: Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und V ein K-Vektorraum.

(a) Man zeige, dass $V^M \overset{def}{=} \mathrm{Abb}(M, V)$ mit den durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{def}{=} f(x) + g(x) \ \text{ für alle } f,\, g \in V^M,\ x \in M \\ (\lambda \cdot f)(x) &\overset{def}{=} \lambda \cdot f(x) \ \text{ für alle } \lambda \in K,\ f \in V^M,\ x \in M \end{aligned}$$

definierten Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist.

(b) Für jedes $f \in V^M$ sei $\mathrm{Tr}(f) \overset{def}{=} \{x \in M \mid f(x) \neq 0\}$ der Träger von f. Sei $E \subseteq V^M$ die Menge aller $f \in V^M$, für die $\mathrm{Tr}(f)$ eine endliche Menge ist. Man zeige, dass E ein Unterraum von V^M ist.

(c) Sei jetzt $V = K$ (wie in 8.4 (3)). Für jedes $a \in M$ sei $f_a \in V^M$ die Abbildung definiert durch

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a, \\ 0 & \text{falls } x \neq a. \end{cases}$$

Man zeige, dass $\mathrm{Span}(\{f_a \mid a \in M\}) = E$ gilt.

(d) Man zeige, dass $\{f_a \mid a \in M\}$ eine freie Teilmenge von V^M ist.